МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ,
СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ В НЕПРОМЫШЛЕННОЙ СФЕРЕ

На правах рукописи

ГЕНС ГЕОРГИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

08.00.13 - "Математические методы и применение вычислительной техники в экономических исследованиях, планировании и управлении народным хозяйством и его отраслями".

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
экономических наук

Научный руководитель -
доктор экономических наук,
профессор Ю.В.ОВСИЕНКО

Москва-1982

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Неуклонное повышение эффективности общественного производст-а, целенаправленный переход на преимущественно интенсивные фак-оры роста и развития экономики являются стратегической линией овершенствования методов планирования и управления экономикой. е содержание раскрыто товарищем Л.И.Брежневым в Отчетном докладе К КПСС XXУI съезду Коммунистической партии Советского Союза сле-ующим образом: "Интенсификация экономики, повышение ее эффектив-ости, если переложить эту формулу на язык практических дел, со-тоит прежде всего в том, чтобы результаты производства росли ыстрее, чем затраты на него, чтобы, вовлекая в производство равнительно меньше ресурсов, можно было добиться большего. Реше-ию этой задачи должны быть подчинены планирование, научно-техни-еская и структурная политика".[ж)] В решении поставленных партией адач важная роль принадлежит совершенствованию методов планирова-ия и управления в области капитальных вложений и строительства.

Формирование рациональной структуры капитальных вложений, остроение всесторонне обоснованных строительных программ, четкая рганизация строительных работ не только прямо воздействуют на эф-ективность общественного производства, но и способствуют формиро-анию прогрессивной отраслевой структуры народного хозяйства, соз-анию совершенной научно-технической и производственной базы, яв-яющихся основой эффективного развития народного хозяйства в буду-ем.

Прямое воздействие качества планирования на эффективность роизводства осуществляется здесь за счет сокращения сроков строи-ельства, более полного использования имеющихся ресурсов, более

) Материалы XXУI съезда КПСС. М.: Политиздат, I98I, с.54.

нтенсивной загрузки строительных, транспортных и других органи-
аций, ликвидации простоев, переделок и других форм нерациональ-
ого использования ресурсов. Этому направлению работ в материа-
ах XXУI съезда КПСС уделяется специальное внимание, указывается
а важную роль экономической науки в совершенствовании методов
озяйствования.

Совокупность долговременных воздействий рациональной полити-
и в области капитальных вложений и строительства является даже
олее важной. Преимущественный рост и развитие прогрессивных от-
аслей народного хозяйства, определяющих научно-технический про-
ресс, первоочередное направление капитальных ресурсов на реконст-
укцию и техническое перевооружение действующих промышленных пред-
риятий, концентрация капитальных вложений на важнейших участках
ромышленного и сельскохозяйственного производства, пусковых
тройках, - все это ведет к коренным сдвигам в структуре общест-
енного производства, способствует скорейшему переходу его на
уть интенсивного развития. В Основных направлениях экономическо-
о и социального развития СССР на I98I-I985 гг. и на период до
990 года подчеркивается, что "намеченное увеличение объема нацио-
ального дохода на пятилетку предстоит обеспечить при меньшем,
ем за предыдущие пять лет абсолютном и относительном приросте ка-
итальных вложений" / 3 /.

Таким образом, задача совершенствования методов планирования
апитальных вложений является в настоящий момент актуальной и
рактически значимой. Необходимо однако отметить, что в экономи-
еской науке далеко не все направления данной проблемы получили
остаточную разработку. В частности, требует дальнейшей серьезной
роработки вопрос об эффективности капитальных вложений, в частно-
ти, вопрос об учете фактора времени в планировании капитального

гроительства. Большую роль в совершенствовании методов планиро-ания капитальных вложений призваны сыграть экономико-математиче-кие методы и модели. Однако необходимо отметить, что в большин-тве случаев экономико-математические разработки еще не вышли из гадии теоретических и экспериментальных исследований. Внутри казанного направления имеется ряд нерешенных вопросов.

На наш взгляд, наиболее важным, ключевым направлением в ис-ользовании математических методов для задач совершенствования ланирования капитальных вложений должно служить приближение эко-омико-математических разработок к непосредственным нуждам практи-и планирования, учет важнейших черт и особенностей действующего озяйственного механизма, отражение, углубленная проработка и еализация постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 12 ию-я 1979 г. "Об улучшении планирования и усилении воздействия хо-яйственного механизма на повышение эффективности производства и ачества работы". В этом постановлении сформулирована задача обес-ечения глубокой взаимосвязи всех форм и методов планирования, риентация их на конечные результаты производственной и хозяйст-енной деятельности.

В свете указанной задачи в данной работе ставилась цель раз-аботки единой методической основы для моделирования проблем пла-ирования капитальных вложений с использованием математических етодов. В работе обосновывается тезис о глубоком внутреннем един-тве большого комплекса задач формирования объемов и структуры ка-итальных вложений, определения программы строительных и строи-ельно-монтажных работ, задач оптимальной загрузки мощностей троительных организаций, построения календарных графиков реализа-ии крупных строительных программ и других. Даже качественное ре-ение отдельных, изолированных друг от друга задач указанных ти-

)в не может гарантировать практической ценности проведенного ис-
ıедования, если не будет обеспечена взаимосвязь планов и средств
: реализации, согласование формируемой структуры капитальных
ıожений и строительных работ, а также их согласованное разверты-
ıние во времени.

В связи с поставленной целью в диссертации потребовалось:

- проанализировать задачи, существующие модели и методы рас-
)еделения капитальных вложений, выявить факторы, снижающие эф-
ɛктивность их применения при решении практических задач и опре-
ɛлить перспективные направления исследования;

- разработать единый подход к моделированию задач распреде-
ɛния капитальных вложений (ЗРКВ) и унифицированные формы пред-
гавления моделей задач РКВ;

- построить комплекс базовых моделей дискретной оптимизации,
ıекватных типовым ЗРКВ и разработать методы и приемы решения,
ɛследования и согласования этих задач.

Методологической базой выполненного исследования являются
роизведения классиков марксизма-ленинизма, материалы ХХУ и ХХУI
ьездов КПСС и пленумов Центрального Комитета партии и решения
артии и Правительства по хозяйственным вопросам. При разработке
ассматриваемых проблем автор использовал работы советских ученых
о вопросам совершенствования народнохозяйственного планирования,
также ряд работ зарубежных ученых, посвященных решению отдель-
ых методических вопросов.

Непосредственным объектом исследования послужили процессы
ароднохозяйственного планирования на уровне отрасли, крупного
ромышленного объединения, а также отраслевых и межотраслевых
троительных организаций. Особое внимание автором уделено прора-

отке вопросов моделирования и анализа задач распределения капи-альных вложений и формирования строительных программ в крупных гроительных организациях.

Научная новизна диссертации состоит в разработке методиче-ких приемов, позволяющих осуществить полный цикл постановки, ре-ения и анализа задач распределения капитальных вложений. Разра-отка методических вопросов не ограничивалась теоретическим иссле-ованием названных проблем, но также были построены некоторые вы-ислительные алгоритмы, позволяющие решать возникающие задачи, азработаны конкретные приемы анализа вычислительной сложности ре-аемых задач, представляющие практический интерес при включении омплекса указанных задач в состав АСУ. Основные результаты выпол-енного исследования заключаются в следующем:

I. На основе анализа достигнутого уровня разработки проблем оделирования и анализа задач распределения капитальных вложений формирования программ строительных и строительно-монтажных ра-от выработан единый подход, позволяющий формулировать основные иды типовых задач хозяйственной практики в области капитальных ложений в унифицированной, стандартной форме.

2. Построен, основанный на модульном принципе, комплекс дис-ретных оптимизационных моделей, отражающих специфику конкретных адач распределения капитальных вложений. Модули комплекса позво-яют учитывать: иерархию объектов управления; взаимозависимость троительных объектов; региональную структуру капитальных вложе-ий и ряд других аспектов.

3. Исследована вычислительная сложность задач распределения апитальных вложений и разработаны для них эффективные приближен-ые методы, позволяющие получать "почти оптимальные" решения.

проведен подробный анализ характеристик предлагаемых алгоритмов, таких как трудоемкость и память.

4. Разработаны методы решения и исследования задач с фиксированными доплатами, позволяющие учесть специфику и экономическое содержание затрат различного рода в капитальном строительстве.

5. Разработаны методы решения иерархических задач распределения капитальных вложений, учитывающих структуру управления строительством и взаимосвязи уровней управления.

6. Разработаны методы увязки задач формирования структуры капитальных вложений с задачами развертывания капитального строительства во времени с учетом сложной структуры взаимосвязей строительно-монтажных работ.

Практическая ценность сформулированных и разработанных в диссертации положений заключается в их непосредственной направленности на решение конкретных задач, возникающих в практике народнохозяйственного планирования. Достоверность и практическая значимость результатов подтверждена теоретическими обоснованиями и экспериментальными проработками, а также практическим внедрением ряда положений диссертации.

Основные положения, изложенные в диссертации, внедрены в "АСУ-спецзадач" Минводхоза СССР, "АСУ-Инжстрой" Главмосинжстроя при Мосгорисполкоме, "АСУ-План" Главмоспромстроя при Мосгорисполкоме, а также в "НИР-Модель строительство" и "НИР-План", проводимые во ВНИИНС.

Основные результаты проведенного автором исследования докладывались и обсуждались на IУ Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Новосибирск, 1977), на Всесоюзном симпозиуме по системам программного обеспечения решения задач оптимального планирования (Нарва-Йыэсуу, 1978), на Ш Всесоюзной конференции по исследованию операций (Горький, 1978), на IX конференции по оптимизационной технике (Варшава, 1979), на X Международном симпозиуме по математическому программированию (Монреаль, 1979), на УШ Всесоюзном совещании по проблемам управления (Таллин, 1980), на I Всесоюзном совещании по анализу нечисловой информации (Алма-Ата, 1981), на конференции "Теория систем и разработка АСУ" (Москва, 1981), а также на ряде отраслевых конференций, всесоюзных школ и научных семинарах ЦЭМИ, ИПУ и ВНИИГиМ. Основные результаты, полученные автором по исследуемой теме, отражены в публикациях, общим объемом 8 п.л.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на страницах машинописного текста. Список использованной литературы включает 103 наименования работ.

В первой главе рассматривается место задач РКВ в комплексе проблем народнохозяйственного планирования, исследуются основные направления совершенствования постановки и решения этих задач; на основе рассмотрения различных точек зрения на использование математических методов в моделировании ЗРКВ формулируется и обосновывается единый подход, приводящий к постановке ряда задач дискретной оптимизации. Исследуется структура моделей дискретной оптимизации, выясняется экономический смысл их параметров. Формируется базовый комплекс моделей для типовых ЗРКВ, особенностями которого являются относительная простота, адекватность и возможность работы с первичной экономической информацией.

Вторая глава посвящена методическим вопросам исследования и решения задач дискретной оптимизации. В ней исследуется вычислительная сложность ЗРКВ и обосновывается целесообразность применения приближенных методов при их решении; приводятся основные определения и свойства приближенных алгоритмов для ЗРКВ и разрабатываются методы построения априорных гарантированных оценок целевой функции и принципы конструирования алгоритмов, вырабатывающих решение задачи с любой наперед заданной точностью.

Третья глава посвящена разработке эффективных приближенных алгоритмов для важнейших классов ЗРКВ, а также вопросам совмещения задач РКВ с задачами календарного планирования. Для исследуемых задач предлагается комплекс, состоящий из трех взаимосвязанных задач, причем в первых двух рассматриваются отдельно взятые объекты, а в третьей - все объекты, входящие в план организации. Результатом решения первой задачи является прогноз времени строительства объекта, второй - такое распределение ресурсов на работах объекта, которое обеспечивает заданную надежность строительства объекта за директивный срок; третьей - годовая программа строительной организации. Обоснован тезис о том, что в рамках предложенного в работе единого подхода можно учесть разнообразные факторы, связанные с конкретными условиями планирования, развертывания строительной программы во времени и взаимодействием экономических рычагов и стимулов планирования. Показана практическая применимость предложенного подхода в конкретных задачах распределения капитальных вложений.

В заключении изложены основные результаты, полученные в диссертации.

В приложении приводятся характеристики разработанных алгоритмов и результаты.

ГЛАВА I. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ В ОТРАСЛЯХ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

§ I. Факторы повышения эффективности распределения капитальных вложений

Планирование капитальных вложений является составной частью рмирования текущих и перспективных планов развития народного зяйства. За счет капитальных вложений обеспечивается планомере расширенное воспроизводство основных фондов в системе народхозяйственного планирования, решаются важные задачи социально) и культурного развития. Капитальные вложения служат фактором, пределяющим возможные масштабы развития экономики и являются м рычагом, с помощью которого осуществляются все наиболее сущевенные сдвиги в структуре общественного производства. Поэтому вершенствование методов планирования и управления в области катальных вложений и строительства служит одним из наиболее дейвенных факторов, определяющих качество плановой работы в целом. ровень и качество планирования капитальных вложений могут слуить показателем уровня совершенства организации планирования в лом.

В процессе создания материальной базы для расширения произдства капитальные вложения выполняют три основные функции: беспечение прироста новых фондов; обеспечение возмещения выбывх основных фондов; обеспечение необходимого прироста незаверенного строительства, являющегося основой дальнейшего расширея производства в последующие годы. В осуществлении капитально строительства соединены в неразрывное целое процессы простого расширенного воспроизводства основных фондов.

С целью выяснения точного места задач рационального распреления капитальных вложений в комплексе задач планирования расıотрим экономическое содержание планирования капитальных вложе-ıй как целостной системы. Отдельные компоненты задачи планиро-ıния капитальных вложений приобретают реальный смысл только в ıразрывном единстве с другими компонентами. Помня об этом, вы-ıлим основные направления плановой работы в области капитальных ıожений.

Первая проблема состоит в определении общей величины капи-ıльных вложений, которые могут быть выделены обществом для раз-ıтия народного хозяйства в данном направлении. Эта величина оп-ıделяется прежде всего потребностями ввода в строй конкретных ıъектов. С другой стороны, она определяется источниками ресурсов ıпитальных вложений в форме фонда возмещения и части националь-ıго дохода, выделенного на накопление.. На последующих этапах ıоисходит распределение общей суммы капитальных вложений по ос-ıвным направлениям их использования, выделяемым по тому или ино-ı принципу. При этом происходит формирование структуры капиталь-ıх вложений.

Принципиально важным моментом является двойственный характер ıруктуры распределения капитальных вложений. С одной стороны, ıкая структура выступает в виде распределения определенной стои-ıстной величины по направлениям использования и фондодержателям, ıдругой стороны, она выступает в виде определенной совокупности ıспределенных тем или иным способом конкретных материальных ре-ıрсов. Глубокие различия между стоимостной и материально-вещест-ıнной структурами капитальных вложений, при их внутреннем един-ıве, коренящиеся в двойственном характере труда как труда абст-ıктного и труда конкретного, составляют внутреннее содержание ıльшинства проблем, связанных с рациональным планированием капитальных вложений. Эти проблемы носят объективный характер и не могут быть разрешены путем простого упрощения задачи. Так, даже идеальный план распределения капитальных вложений по стоимости может оказаться практически неприемлемым, если в нем не учтена детальная материально-вещественная структура капитальных ресурсов, если план капиталовложений не увязан теснейшим образом с планами строительства и реконструкции. Точно так же невозможно отказаться от рассмотрения вопросов распределения капитальных вложений по стоимости, ограничившись формированием программ и планов строительства, поскольку только стоимостная оценка обеспечивает взаимосвязь этих планов с интегральными показателями развития народного хозяйства, обеспечивает соизмерение затрат и результатов в создании новых объектов, служит основой исчисления показателей эффективности строительства.

В силу указанной взаимосвязи стоимостной и материально-вещественной структур капитальных вложений распределение капитальных вложений не может быть всякий раз произвольным, зависящим от волевых решений, основанных на искусственном выделении тех или иных критериев. Необходима строгая увязка выделяемых ресурсов с производственными возможностями и потребностями народного хозяйства. Тем самым план распределения капитальных вложений оказывается тесным образом увязанным с планами и производственной программой основных фондосоздающих отраслей. Это связывает задачу планирования капитальных вложений с проблемой определения воспроизводственной структуры капитальных вложений. Сюда входит как проблема распределения капитальных вложений на производственные и непроизводственные, так и детальная структура распределения вложений в отрасли, обеспечивающие расширенное воспроизводство.

Определенные сложности в решении указанных задач вызывает тот факт, что некоторая часть капитальных вложений осуществляется в нецентрализованном порядке, в основном для поддержания и модернизации действующих предприятий. В соответствии с решениями ХХУ и ХХУI съездов КПСС и Постановления ЦК КПСС от I2 июля I979г. в планировании централизованных капитальных вложений необходимо прежде всего сосредоточить внимание на задачах совершенствования структуры общественного производства в целом, осуществлении сбалансированного развития народного хозяйства, формировании сдвигов в направлении выработки прогрессивной структуры отраслей народного хозяйства.

В текущем годовом планировании (и частично - в перспективном планировании) ставится и решается важная проблема рационального распределения капитальных вложений на составляющие компоненты: ввод в действие основных фондов и прирост незавершенного строительства, значение которых для экономики далеко не равнозначно.

Отраслевая структура капитальных вложений определяется системой производственных взаимосвязей отраслей народного хозяйства, а также системой воспроизводственных связей. Существенно иные задачи ставятся и решаются внутри отдельных отраслей и отраслевых комплексов. Здесь центральной проблемой становится установление внутреннего единства потребностей развития производства - с одной стороны, и возможностей реализации планов капитального строительства - с другой. По существу на "микроуровне" воспроизводится задача расчета отраслевых взаимодействий, поскольку отрасли, обеспечивающие воспроизводство основных фондов и капитальное строительство, реализуют свою деятельность по отношению одновременно ко многим отраслям. С другой стороны каждая из отраслей, выступающих в роли потребителя капитальных ресурсов, решает, как правило, одновременно целый ряд задач развития.

Важным моментом является также формирование территориальной структуры капитальных вложений и обеспечение сбалансированности планов капитального строительства и реконструкции с планами развития отдельных областей и регионов, определяющих, в частности, обеспеченность капитального строительства трудовыми ресурсами.

Таким образом, как мы показали, понятие структуры капитальных вложений является достаточно сложным и многогранным. Этому соответствует и достаточно сложный и многоуровневый процесс формирования плана распределения капитальных вложений и обеспечивающих его частей плана развития народного хозяйства. Формирование структуры капитальных вложений последовательно проходит целый ряд фаз от выработки глобальных пропорций общественного производства до детальной отраслевой структуры производства, и далее - вплоть до формирования конкретных технологических программ строительства и реконструкции.

Главным критерием при формировании рациональной структуры капитальных вложений является обеспечение максимальной эффективности совокупного общественного производства. Следует, однако, отметить, что в настоящее время в области планирования и использования капитальных вложений наблюдаются отдельные отрицательные явления и тенденции. За последние годы наблюдалось снижение эффективности капитальных вложений, что объясняется прежде всего распылением средств по большому числу переходящих и вновь начинаемых строек, ростом незавершенного строительства, а также увеличением стоимости единицы вводимой мощности. Неоправданно большой рост числа строек (за 70-е годы - увеличение почти вдвое) не был подкреплен соответствующим ростом возможностей строительной базы и фондосоздающих отраслей. Поэтому неизбежно увеличилось число незавершенных и законсервированных объектов. В последующем это отрицательно сказалось на формировании структуры капиталовложений. Несколько возросла эластичность фондов по производимой продукции, что связано с тем, что значительная часть капиталовложений направляется на компенсацию снижения фондоотдачи. Поэтому рост объема капиталовложений опережает рост ввода мощностей. Как видим, в области планирования капиталовложений все стороны оказываются чрезвычайно тесно взаимосвязанными, так что ошибка, допущенная в решении отдельной задачи на определенном этапе, неизбежно сказывается отрицательным образом и на решении большого числа взаимосвязанных задач.

Имеется ряд объективных причин, породивших указанные выше трудности. В частности, возросла стоимость добычи железорудного сырья, определенного роста затрат потребовала работа по повышению качества продукции, возросла стоимость как импортного, так и отечественного оборудования, произошло некоторое удорожание строительно-монтажных работ. Наряду с этим имеется и ряд субъективных причин, связанных с тем, что методическая база планирования не успела в достаточной степени выйти на уровень, соответствующий возросшим требованиям интенсивно развивающейся социалистической экономики. Большие потери народное хозяйство несет из-за ошибок в проектировании, из-за недостаточной инженерной подготовки строительства, недостаточно обоснованных планов распределения и обеспечения капитальных вложений. Определенную отрицательную роль сыграли и некоторые сложившиеся тенденции и традиции в планировании и хозяйственной практике. В частности, сложившаяся практика обеспечения наивысшими капиталовложениями новых строек неизбежно приводила к увеличению их числа. Недостатки хозяйственного механизма в строительстве также в некоторой степени повлияли на снижение эффективности капитальных вложений. В частности, строители зачастую стремились навязать выгодные для выполнения собственных планов проектные решения, принять нерациональную с точки зрения народного хозяйства строительную программу. Определенные трудности вызывала и необходимость во многих случаях добиваться решения вопросов согласования действий различных министерств и ведомств, участвующих одновременно в реализации крупных строительных программ.

На преодоление этих недостатков направлено Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР "Об улучшении планирования и усилении воздействия хозяйственного механизма на повышение эффективности производства и качества работы", решения XXУI съезда КПСС. Основной целью большого комплекса мер, определяемых этими решениями, является обеспечение пятилетнего плана с обоснованным распределением заданий по годам. Важную роль сыграет изменение порядка планирования: переход от планирования объемов капитальных вложений и строительно-монтажных работ к планированию выделяемых лимитов; таким образом, освоение капитальных вложений перестает быть оценочным показателем и становится непосредственно ресурсным. Лимиты устанавливаются на пятилетку в целом, что стимулирует экономию расхода выделенных средств. Важной мерой является установление неизменности титульных списков на весь период строительства (изменения допускаются только при пересмотре проекта в сторону прогрессивных технологий). Установлен четкий порядок представления проектно-сметной документации и рабочих чертежей. Центр тяжести при планировании капитальных вложений переносится на завершение начатых строек и реконструкцию действующих предприятий. Все предприятия и министерства обязаны в составе пятилетних планов представлять и сводные планы реконструкции и технического перевооружения. Представляемый план должен быть комплексным и увязанным в динамике с планами внедрения новой техники и капитального строительства. Большое внимание будет уделено снижению материалоемкости и фондоемкости создаваемой продукции, в частности, в фондосоздающих отраслях. Широкое распространение получат новые прогрессивные технологии строительных и монтажных работ: монолитный железобетон, использование легких изоляционных и отделочных материалов, клееных деревянных конструкций, облегченных профилей проката и др. На снижение материалоемкости выделяются значительные ресурсы, которые должны дать быстрый и значительный эффект.

В практике планирования необходимо отказаться от применения грубых оценочных показателей типа средних норм расхода материалов на I млн.руб сметной стоимости строительства, шире использовать методы научного обоснования проектов с использованием средств математического и экономико-математического моделирования.

Эти меры направлены на повышение эффективности капитальных вложений, сокращение сроков строительства, повышение качества строительных работ.

Проблема эффективности капитальных вложений является чрезвычайно сложной и не может быть достаточно полно отражена в рамках настоящего исследования. Однако, основные принципы определения эффективности капитальных вложений существенным образом входят в состав любых моделей распределения капитальных вложений. К числу таких принципов относятся:

- обеспечение взаимосвязи критериев решения конкретных задач распределения капитальных вложений с интегральными критериями эффективности общественного производства; в соответствии с этим принципом структура конкретной модели распределения капитальных вложений должна подвергаться содержательному анализу с целью определения качества указанного соответствия;

- оценка экономической эффективности должна обеспечиваться анализом соответствия принимаемого решения конкретной материально-вещественной структуре исследуемой производственной системы;

- основным средством анализа соответствия стоимостных и материально-вещественных факторов эффективности капитальных вложений является определение временных характеристик процесса реализации программы использования капитальных вложений в строительстве.

Детально вопросы эффективности капитальных вложений разработаны в работах Т.С.Хачатурова, Р.М.Меркина, В.П.Красовского, Ф.Н.Клоцвога, Б.П.Плышевского и ряда других советских исследователей (например, / 36, 49, 52, 57, 68, 69, 81 /) и использованы при проработке различных аспектов рассматриваемых в данной диссертации моделей.

В решении задач повышения эффективности капитальных вложений важная роль принадлежит также практическим вопросам организации взаимодействия различных отраслей. Это становится все более актуальным по мере того как в экономике нашей страны все большую роль начинают играть крупные народнохозяйственные программы, в реализации которых участвуют одновременно много отраслей, ответственность за выполнение которых разделяют одновременно несколько министерств и ведомств. Организация межотраслевого взаимодействия может в этих условиях стать решающим фактором, определяющим возможность и эффективность реализации народнохозяйственной программы в целом. В тех случаях, когда такое взаимодействие не удается с самого начала обеспечить и наладить, возникают неоправданные траты, падает совокупная эффективность капитальных вложений. Например, при реализации крупнейшей программы освоения нефтяных и газовых ресурсов Западной Сибири, в которой задействован целый ряд добывающих, промышленных и строительных министерств, не удалось избежать целого ряда ошибок, связанных с несогласованным направлением капитальных вложений по отраслевым каналам. Это привело к возникновению, зачастую на одном и том же месте, нескольких дублирующих предприятий и производств и обслуживающих подразделений. Например, при создании Тобольского нефтехимического комплекса несколько министерств, осуществляющих строительные работы, приступили к параллельному созданию складского и энергетического хозяйства, что неизбежно сказалось на затягивании сроков строительства, общем удорожании строительных работ. Важно не допустить повторения ошибок подобного рода и обеспечивать продумывание межотраслевых и межведомственных взаимодействий уже при постановке и решении плановых задач распределения капитальных вложений.

Таким образом, на эффективность распределения капитальных вложений влияют как факторы, относящиеся главным образом к организации взаимодействия различных подсистем народного хозяйства, согласования текущего и перспективного планов его развития, так и факторы, отражающие прежде всего качество решения задачи распределения капитальных вложений в данном конкретном звене управления. Для решения последней задачи целесообразно применение специальных методов математического моделирования. Необходимость обращения к этим методам вызывается тем, что задачи распределения капитальных вложений, решаемые в средних и нижних звеньях, требуют рассмотрения большого числа вариантов, учета многочисленных факторов оперативного получения решений. Для построения экономико-математических моделей необходимо предварительно проанализировать содержание и структуру задач распределения капитальных вложений, к чему мы переходим в следующем параграфе.

§ 2. Структура задач распределения капитальных вложений в отраслях народного хозяйства как задач дискретной оптимизации

Рассмотрим теперь более подробно методическую базу решения задач распределения капитальных вложений. В практике планирования применяется целый ряд методов, позволяющих решить как вопрос о формировании плана капитального строительства, так и вопрос о детальной структуре выделяемых ресурсов в стоимостной и в натуральной форме. Для решения задачи о формировании плана капитального строительства применяется метод построения так называемых титульных списков, в создании которых участвуют проектные и плановые организации заинтересованных отраслей и ведомств. Титульные списки несут в себе значительную информацию о структуре капитальных вложений. Кроме списка первоочередных строек, подлежащих централизованному обеспечению капитальными ресурсами, титульные списки в косвенной форме содержат информацию о приоритетах основных строек и фондодержателей. Кроме того, титульные списки содержат важную информацию об укрупненных цифрах стоимостной и натуральной структуры капитальных вложений.

Для определения детальной структуры капитальных вложений по важнейшим видам материальных ресурсов используется совокупность методов расчета необходимой суммы вложений и фондов, приходящихся на заданное количество производимой продукции. Существуют два основных метода, при одном из которых (метод фондоемкости) производится расчет необходимого прироста фондов по заданной величине прироста продукции. При другом методе (метод капиталоемкости) аналогичный расчет осуществляется для необходимых капитальных вложений. Установлено / 57 /, что показатели капиталоемкости более чутко реагируют на изменение темпов роста отраслей и позволяют дифференцировать для каждого варианта использования капитальных вложений отраслевые коэффициенты фондоемкости. Кроме того, показатели капиталоемкости могут быть дифференцированы в соответствии с направлением капитальных вложений, то есть могут быть определены те части прироста продукции, которые производятся за счет строительства новых фондов и за счет расширения и реконструкции действующих предприятий. Это дает возможность поставить задачу оптимизации распределения капитальных вложений и обеспечения ее необходимой информационной базой.

Следует однако отметить, что рассмотренные выше методы применимы главным образом к проблемам определения народнохозяйственной структуры капитальных вложений / 50 /. Их использование на уровне отрасли или крупной строительной организации недостаточно эффективно вследствие укрупненности используемых показателей, а также в связи с тем, что они являются нормативными и расчеты по ним дают приемлемые результаты только при использовании стоимостных показателей. При переходе же к натуральным показателям результаты становятся менее устойчивыми, поскольку натуральные нормативы в строительстве изменчивы как от объекта к объекту, так и во времени. Кроме того, нормативный характер используемых методов не позволяет ставить вопрос о выборе оптимальных вариантов распределения капитальных вложений, точнее говоря, проблемы выбора оптимальных вариантов ставятся и решаются вне рамок указанных методов, что вызывает впоследствии необходимость согласования получаемых результатов, в частности, согласование натуральных и стоимостных показателей и др.

При решении вопросов, связанных с распределением капитальных вложений и составлением годовых программ строительно-монтажных работ для крупных строительных организаций, на первый план выдвигается проблема формирования и сравнения различных вариантов распределения капитальных вложений с учетом как стоимостных показателей, отражающих эффективность различных вариантов, так и многочисленных натурально-вещественных ограничений, вытекающих из структуры рассмотренных вариантов (состав и количество имеющихся ресурсов, потребность в строительных мощностях различного вида и т.д.). Для решения таких задач, имеющих большую размерность и требующих перебора и сравнения огромного числа вариантов за ограниченное время, целесообразно привлечение экономико-математических методов.

В настоящее время к идее использования математических моделей в определении рациональной структуры капитальных вложений приходят многие авторы. Такие модели не являются искусственными, а органически вытекают из задач совершенствования информационной и методической основы планирования (см., например, обзор дискуссии о методах распределения капитальных вложений в / 48,57,68,81 /). Основная часть работы посвящена вопросам создания экономико-математических моделей для задач распределения капитальных вложений и разработке эффективных методов и алгоритмов решения таких задач.

В экономической литературе имеется большое число разнообразных моделей распределения капитальных вложений, основанных на различной теоретической и методической базе. Прежде всего отметим большое число работ, посвященных формализации указанных выше нормативных методов расчета объемов капитальных вложений и основных фондов, базирующихся на различного рода зависимостях между капитальными вложениями и объемами получаемой на их основе продукции. В каждой из таких моделей / 48, 60, 67 / делается попытка усовершенствовать указанные методы расчета путем более точного установления характера зависимости между различными факторами, определяющими конечные результаты использования капитальных вложений, путем введения в схему дополнительных ограничений и условий, а также путем проработки одновременно значительного числа вариантов, за счет специальных методов анализа математических моделей.

Более совершенными являются модели, позволяющие одновременно учитывать взаимодействие большого числа отраслей и направлений использования капитальных ресурсов внутри отраслей между собой. Это достигается за счет использования специального вида матриц, отражающих межотраслевую структуру основных фондов народного хозяйства. Обзор такого типа эконометрических моделей приведен в / 48, 67 /. Развитием матричного метода моделирования структуры капитальных вложений является разработка совокупности балансов, формируемых на основе межотраслевого баланса народного хозяйства. Балансовый метод составляет также основную часть ряда комплексов экономико-математических моделей, включающих задачи распределения капитальных вложений в состав общей задачи формирования народнохозяйственного плана. Модели последнего вида пока находятся на стадии экспериментального исследования и доработки.

Наряду с некоторыми очевидными достоинствами балансового метода, состоящими в комплексном отражении одновременно большого числа народнохозяйственных связей, он обладает и рядом существенных недостатков. Прежде всего, задача оптимизации для балансовых моделей всегда является чуждым искусственным элементом. Балансовые модели рассчитаны на статические условия, устойчивые повторяющиеся связи, что нехарактерно для многих случаев капитального строительства.

Дальнейшее развитие идея использования балансового метода в планировании капитальных вложений получает в динамических балансовых моделях. Однако такие модели в настоящее время недостаточно разработаны.

Гораздо более плодотворным оказывается использование сетевых методов и моделей, позволяющих анализировать и прогнозировать возникновение узких мест в процессе реализации программы использования капитальных вложений, органически учесть сочетание структурных и ресурсных характеристик системы. Сравнительно просто в сетевых моделях учитывается фактор неопределенности, они дают возможность имитировать множество конкретных вариантов и ситуаций. Некоторые недостатки, присущие сетевым моделям, связанные с жесткостью системы связей, могут быть в настоящее время преодолены в различного рода обобщениях сетевых моделей / 19 /. Ясная направленность на конечный результат, простой способ отражения взаимосвязей хорошо соответствуют специфике строительных процессов в различных отраслях промышленности.

В настоящей работе сетевые модели трактуются и используются как удобное средство совмещения различного вида условий на развертывание капитальных вложений во времени с центральной задачей дискретной оптимизации, отражающей требование оптимального распределения капитальных вложений (см.третий параграф третьей главы).

Сетевые модели естественно приводят к формулировке задач распределения капитальных вложений во времени. Проблематика учета временных характеристик капитальных вложений и решение общей задачи динамики капитальных вложений для случая достаточно большой размерности является самостоятельной сложной проблемой и не может быть рассмотрена в объеме данной работы. Однако необходимо признать, что практическую ценность любые модели и методы распределения капитальных вложений приобретают лишь постольку, поскольку они непосредственно учитывают фактор времени, совмещают процесс распределения капитальных вложений в пространстве с распределением их во времени (с указанием сроков начала строительства объектов, готовности отдельных очередей строительства и пуска готовых объектов). Поэтому в данной работе вопросам динамики капиталовложений уделяется большое внимание. Прежде всего факторы динамики косвенно учитываются в структуре задач оптимизации путем выбора в качестве отдельных переменных моделей показателей, относящихся к различным моментам или этапам строительных работ. Тем самым появляется возможность фиксировать в модели последовательное прохождение каждым из реализуемых проектов основных этапов его готовности.

Отметим, что такая точка зрения не является искусственной, и в целом соответствует современному представлению объектов строительства в виде набора отдельных законченных частей или этапов, называемых обобщенно модулями. Планированию на основе расчленения строительного процесса на этапы соответствуют принципы модульного проектирования как при разработке технологической основы проектов, так и при формировании организационной и архитектурной частей проектов / 36 /.

Как показывает практика, при использовании в строительстве принципов модульности ускоряется оборот капитальных вложений, сокращаются сроки строительства, повышается уровень ответственности и качества работы. Появляется возможность организовать освоение мощностей одновременно со строительством предприятий, улучшить оргпроектирование управления.

Сочетание принципов модульности в представлении результатов деятельности строительных организаций и принципов учета взаимосвязей между отдельными видами работ в простой форме сетевой модели позволяет подойти к постановке и решению задачи об унифицированном представлении задач распределения капитальных вложений в относительно простой форме. Действительно, в целом ряде работ показано, что указанные выше принципы позволяют рассматривать и анализировать большую совокупность задач от простейших задач распределения заданий между строительными организациями и вплоть до организации планирования крупными инвестиционными программами. Вопрос заключается лишь в выборе адекватной модельной основы, достаточно простой, чтобы соответствовать характеру имеющейся в распоряжении плановика информации, и основанной на достаточно развитом математическом аппарате, чтобы получить совокупности эффективных методов исследования и решения моделей.

В данной работе обосновывается тезис о том, что такой адекватной теоретической основой могут служить модели дискретной оптимизации. Особенностью задач дискретной оптимизации является то, что они позволяют единым, универсальным образом описывать как конкретные проблемы выбора вариантов, так и проблемы их количественной оценки. Для описания задач выбора используются булевские переменные, принимающие значения I или 0, что соответствует принятию или исключению данного варианта плана. С помощью такого рода переменных путем указанного выше приема разбиения процесса-создания объекта на модули во времени и в пространстве можно описывать и более детальную структуру процесса развертывания и создания проекта.

Приведем традиционную постановку задачи распределения капитальных вложений (КВ), в которой учитываются ограничения только по выделенному объему КВ, а в качестве целевой функции рассматривается максимизация товарной строительной продукции, либо другой аналогичный показатель.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max \qquad (I.I)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le B \qquad (I.2)$$

$$a_i, c_i \geqslant 0; \quad x_i = 0 \vee 1; \quad i = \overline{1,n} \qquad (I.3)$$

Здесь

n - количество рассматриваемых объектов;

c_i - эффект от включения i -го объекта в план (это может быть объем товарной продукции, объем продукции отрасли, выпускаемой i -м объектом и т.п.);

a_i - капитальные вложения, необходимые для возведения i -го объекта;

B - выделенный объем капитальных вложений;

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ -й объект включается в план,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это одна из простейших задач, содержанием которой может служить формирование списка объектов капитального строительства при выделении общей суммы капитальных вложений и наложении требований максимальной эффективности их использования. Рассмотренная модель может применяться как при решении проблемы распределения капитальных вложений отрасли, с целью максимизации выпуска продукции, так и при формировании портфеля заказов крупной строительной организации. В зависимости от специфики отрасли и строительной организации в качестве целевой функции может служить: объем СМР (строительно-монтажных работ); объем жилищного строительства; объем товарной продукции; объем прибыли; себестоимость единицы производимой продукции (при промышленном строительстве) и др. В настоящее время в качестве целевых функций наиболее часто используются: максимизация объема товарной продукции (готовые объекты или этапы), либо максимизация объема выпускаемой продукции (при промышленном строительстве). Из обозначений следует, что коэффициенты c_i отражают структуру приоритетов строек, а также могут дополнительно учитывать различные факторы эффективности строительства. Решение таких задач обладает достаточно хорошими характеристиками устойчивости, причем в исключительных случаях ряд объектов может вводиться в план в обязательном директивном порядке, а распределению в этом случае подлежит оставшаяся сумма капитальных вложений. Особенно эффективно применение модели (I.I)-(I.3) в диалоговом режиме. Следует также отметить, что наряду с новыми объектами, в модели могут рассматриваться также реконструируемые объекты. Смысл коэффициентов в этом случае тот же.

Применение рассмотренной модели позволяет получать близкие к оптимальным варианты плана, которые могут служить основой для дальнейших расчетов, а возможность в диалоговом режиме вводить ряд объектов в план в директивном порядке позволяет постепенно улучшать предлагаемые варианты планов. Таким образом, рассмотренная модель является полезным инструментом при принятии плановых решений руководством.

При решении практических проблем рассмотренная задача часто возникает в минимизационной постановке. При этом требуется минимизировать капитальные вложения в отрасль при заданном снизу ограничении на объем выпускаемой вводимыми предприятиями продукции.

При отсутствии условия целочисленности (I.3) задача не представляет вычислительной сложности и легко может быть решена за $O(n \log n)$ операций. Задача же, в которой условие целочисленности существенно, а именно такой и является описанная выше, поскольку капиталовложения дают эффект только после того как их объем превысит некоторую пороговую величину, есть ни что иное как хорошо известная в экономико-математической литературе задача о выборе. Эта задача относится к классу $N\Pi$ -трудных задач / 27 /. Это означает, что для нее, видимо, не существует полиномиального точного алгоритма, хотя переборный алгоритм с оценками $T=M\sim O(2^{\frac{n}{2}})$, где T - трудоемкость алгоритма, а M - требуемый для его реализации объем памяти, строится без особого труда (подробные определения используемых понятий можно найти в следующей главе). В реальных задачах количество объектов (n) может доходить до нескольких тысяч. Например, Главмосинжстроем (Главным управлением по строительству инженерных сооружений в г.Москве) в течение года ведется строительство до 1000 объектов, Главмоспромстроем - до 2000 объектов. При рассмотрении задачи на уровне отрасли размерность еще более увеличивается. Вследствие того, что на современных ЭВМ с помощью переборных алгоритмов не удается решать задачи столь большой размерности, для решения $N\Pi$ -трудных задач применяются различные приближенные алгоритмы. Особенно эффективными для практических приложений являются "быстрые" полиномиальные приближенные алгоритмы с гарантированной оценкой точности решения. Такие алгоритмы позволяют оперативно получать "почти оптимальные" варианты решения задачи и, как правило, обладают точностью не меньшей, чем исходные данные. Построению эффективных приближенных алгоритмов для важнейших классов задач распределения капитальных вложений и посвящены, в основном, следующие главы. Задача (1.1)-(1.3) упрощается (оставаясь тем не менее $N\Pi$ -трудной), если целевой функцией строительной организации является максимизация товарной продукции, которая пропорциональна объему СМР на готовых объектах. В этом случае коэффициенты c_i, a_i $(i=\overline{1,n})$ пропорциональны и рассмотренная задача превращается в задачу о разбиении множеств. В следующей главе приводится разработанный автором эффективный приближенный алгоритм для решения этой задачи, имеющий линейные оценки трудоемкости и памяти.

Рассмотренная упрощенная модель не учитывает специфику задач распределения капитальных вложений (РКВ). Следующий параграф посвящен созданию базового комплекса дискретных оптимизационных моделей для типовых РКВ, в котором учитываются: а) возможность выбора различных вариантов реализации проектов; б) взаимозависимость строительных объектов; в) региональный аспект задач РКВ; г) иерархия строительных организаций и организаций, осуществляющих капитальные вложения; д) необходимость одновременного стимулирования объемов строительно-монтажных работ (СМР) и конечных результатов строительства; е) штрафы за нарушения директивных сроков строительства объектов; ж) динамический аспект задач РКВ.

§ 3. Формирование базового комплекса моделей для задач распределения капитальных вложений

Введение целочисленных переменных и использование принципов модульности в описании объектов позволяют адекватно моделировать структуру большинства конкретных объектов управления, для которых решаются ЗРКВ.

В результате анализа из многочисленных задач дискретной оптимизации удалось выбрать несколько основных, позволяющих с достаточно высокой степенью полноты и универсальности описать основные задачи распределения и использования капитальных вложений. К числу таких задач относятся: а) задача выбора с узкоблочными ограничениями (задача I); б) задача выбора вариантов с древовидными ограничениями (задача 2); в) блочная задача о рюкзаке (задача 3); г) задача выбора с иерархической структурой ограничений (задача 4); д) задачи с фиксированными доплатами; е) задача теории расписаний о минимизации штрафа за запаздывание работ (задача 6); ж) специальный класс задач календарного планирования (задача 7).

Опишем рассматриваемые задачи.

Задача I. Эта задача позволяет описать процесс выбора различных вариантов реализации проектов с одновременным формированием списка реализуемых проектов. Опишем простейшую практическую ситуацию для моделирования которой применяется задача I. Пусть имеется k_i вариантов возведения i -го объекта, причем каждый из вариантов ($j \in \overline{1, k_i}$) характеризуется своей эффективностью - c_{ij} и требуемым объемом капитальных вложений - a_{ij} . Введем переменные x_{ij} -е, соответствующие принятию либо отбрасыванию j -го варианта возведения i -го объекта. Так x_{ij} =I, если i -й объект строится по j -му варианту и x_{ij} =0 в противном случае. В случае, если i -й объект вообще не включается в план, $\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}$ =0. Поскольку объект может возводиться лишь покакому-нибудь одному из вариантов, возникают ограничения $\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \le 1$ (либо $\sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} = 1$, если каждый из объектов включается в план в обязательном порядке). В задаче требуется максимизировать суммарную эффективность капитальных вложений. Приведем формальную постановку задачи I:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} c_{ij} x_{ij} \to max \qquad (I.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} a_{ij} x_{ij} \leq B \qquad (I.5)$$

$$\sum_{j=1}^{K_i} x_{ij} \leq 1 \ ; \ i = \overline{1,n} \qquad (I.6)$$

$$a_{ij}, c_{ij} \geq 0 \ ; \ x_{ij} = 0 \vee 1 \ ; \ i = \overline{1,n} \ ; \ j = \overline{1,K_i} \qquad (I.7)$$

Основным отличием модели (I.4)-(I.7) от предыдущей является условие (I.6). Это условие, кроме описанной выше ситуации, возникает, например, при наличии определенных связей между объектами. В этом случае объекты разбиваются на n групп, по K_i объектов в каждой группе, причем условие (I.6) означает, что из i -й группы может быть включено в план не более одного объекта. Такое ограничение необходимо в случае, когда все объекты i -й группы претендуют на одну и ту же территорию и в ряде других случаев. Смысл переменных, коэффициентов и ограничений модели очевиден.

Задача 2. В задаче I не учитываются ограничения на порядок выполнения объектов. Между тем необходимость учета таких ограничений встала на повестку дня в связи с разработкой комплексных экономических программ развития регионов и созданием территориально-производственных комплексов различного уровня и масштаба, где наиболее важным является обеспечение такого порядка возведения объектов, который обеспечивал бы достижение максимального конечного эффекта на каждом этапе планирования. Ограничения, связанные с наличием определенных зависимостей между объектами, необходимо также учитывать при рассмотрении вопросов оптимизации распределения капитальных вложений при выполнении крупных строительных программ (КСП), строительстве жилых массивов и в ряде других случаев. Дело в том, что КСП представляют собой, по-существу, совокупность большого числа связанных между собой объектов. В результате этого традиционная ЗРКВ (I.I)-(I.3) дополняется ограничениями на порядок выполнения объектов.

Пусть B - общий объем капитальных вложений, выделенный на рассматриваемый период для строительства КСП, n - количество объектов, из которых КСП состоит. Перенумеруем объекты от I до n и поставим в соответствие каждому из них вершину некоторого графа $G=(V,U)$. Условие, что строительство объекта с номером i может быть начато не раньше, чем будет окончено строительство объекта с номером j, записывается как $j \succ i$. Если $j \succ i$ и $\bar{\exists} l \in \overline{1,n} : j \succ l \succ i$, то направленная дуга $u_{ij} \in U$. Вершине с номером $i \; (i=\overline{1,n})$ приписываются две величины: $c_i, a_i \geqslant 0$, где c_i - эффект от возведения i-го объекта, a_i - требуемый для строительства i-го объекта объем капитальных вложений. В настоящее время проводится политика повышения эффективности капитальных вложений, один из моментов которой состоит в уменьшении объемов незавершенного строительства. В связи с этим наиболее приемлемым целевым функционалом в задаче является следующий: определить подмножество ω множества $\{1,2,\ldots,n\}$:

$$\sum_{i\in\omega} c_i \rightarrow max \qquad (I.8)$$

$$\sum_{i\in\omega} a_i \leqslant B \qquad (I.9)$$

причем из $i\in\omega \Rightarrow j\in\omega$ для всех j таких, что $j \succ i$, т.е. выполняются отношения порядка.

Наиболее часто связь между объектами имеет так называемую "древовидную структуру", причем одинаково часто встречаются следующие отношения порядка между объектами: от висячих вершин к корневой (ЗРДI) / 93 /, от корневой к висячим (ЗРД2) и комбинация этих отношений (ЗРДЗ) / 94 /.

Первый случай иллюстрируется следующей ситуацией. Пусть ведется строительство некоторого жилого массива, состоящего из нескольких микрорайонов. В качестве отдельных объектов рассматриваются участки дорог, отдельные жилые дома, магазины, учреждения социально-бытового назначения: детские сады, ясли, магазины и т.п. Ясно, что объекты должны возводиться в следующем порядке: магистральная дорога, дороги ближайшие к магистральной, один или несколько микрорайонов, в которых окончено строительство дорог (причем наиболее целесообразно рассматривать в качестве товарной продукции готовый микрорайон) и т.д.

Зависимость между объектами, отражаемая деревом с направлениями от висячих вершин к корневым (ЗРД2), возникает при строительстве крупного промышленного предприятия. Можно выделить большую совокупность объектов, таких как дороги, жилые дома, объекты социально-культурного назначения, вспомогательные службы и т.д., строительство которых предшествует возведению крупного промышленного предприятия. При решении проблемы распределения капитальных вложений на уровне отрасли или крупного строительного министерства возникает как правило, ЗРД3.

Задача 3. Эта задача предназначена для учета регионального аспекта капитальных вложений. На XXУI съезде КПСС было отмечено, что необходимо "...более гибкое сочетание отраслевого и территориального планирования" / 3 /. В принятой в настоящее время системе планирования определяющим является отраслевой аспект, поскольку именно в отраслевом разрезе выделяются основные ресурсы. Однако дислокация строительных мощностей, сеть дорог, а также ряд важнейших ресурсов, в частности, трудовые, строительные материалы, сырье, в существенной степени зависят от территориального аспекта планирования. С территориальным принципом планирования связаны также и важные социальные факторы, в частности, требование равномерности развития республик, районов и т.д. В связи с вышеизложенным, при разработке народнохозяйственных планов следует учитывать ограниченность капитальных вложений в отрасли, выделяемых каждой из территориальных единиц.

Пусть предприятия отрасли расположены в нескольких районах. В каждом из районов выделяются более мелкие подрайоны, в которых возможно производство продукции отрасли (в качестве районов могут рассматриваться, например, союзные республики, а в качестве подрайонов – области). Выделенные подрайоны могут, в свою очередь, разделяться на части и т.д. Заданы ограничения по объему капитальных вложений, выделяемых каждому району, подрайону и т.д. Требуется максимизировать суммарную эффективность капитальных вложений при выполнении ограничений по объемам этих вложений по каждому району, подрайону и т.д. Для учета этих ограничений используется блочная задача о рюкзаке:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max \tag{I.10}$$

$$\sum_{i \in J_j} a_i x_i \le B_j \; ; \; j = \overline{0,m} \tag{I.11}$$

$$J_0 = \{1, 2, \ldots, n\} \; ; \; J_l \cap J_k \ne \emptyset \Rightarrow J_l \subset J_k \vee J_k \subset J_l \; ; \; k, l \in \overline{1,n} \tag{I.12}$$

$$c_i, a_i \geqslant 0 \; ; \; x_i = 0 \vee 1 \; ; \; i = \overline{1,n} \tag{I.13}$$

где: B_0 – общий объем капитальных вложений в отрасль; B_j – объем капитальных вложений в предприятия отрасли, находящиеся в j -ом районе $(j = \overline{1,m})$; J_j – множество номеров объектов, расположенных в j –м районе.

Задача 4. Эта задача применяется при решении задач распределения капитальных вложений, когда объект управления представляет собой иерархическую систему / 26 /.

Рассмотрим в качестве управляемой иерархической системы крупную строительную организацию. Она представляет собой трех (или четырех-) уровневую систему "главк-трест-(строительное управление)-строительный участок", содержащую до нескольких тысяч элементов (строительных объектов).

Известны общие объемы капитальных вложений, предоставляемых соответственно главку, трестам и строительным управлениям. Одна часть государственных капитальных вложений должна быть направлена на строительство новых объектов, а другая часть - на реконструкцию, расширение и техническое перевооружение действующих объектов. Под технологической структурой будем понимать соотношение капитальных вложений, идущих на строительно-монтажные работы, с одной стороны, и на приобретение оборудования, приборов инвентаря, с другой стороны. Задача состоит в улучшении технологической структуры, т.е. в увеличении удельного веса затрат на оборудование и другие элементы активной части основных производственных фондов (при выполнении плана по объему строительно-монтажных работ), что создает благоприятные условия для роста производительности труда.

Пусть $T=\{T_1,T_2,\dots,T_t\}$ - множество трестов в главке; в i -й трест входят строительные управления $U_{i1},\dots,U_{is}$ $(1\le i\le t)$; строительному управлению U_{ij} подчиняются строительные объекты $O_{ij1},\dots,O_{ijr}$; каждый объект O_{ijk} имеет p своих вариантов строительства и реконструкции; a_{ijkl} - капитальные вложения при реализации l -го варианта развития объекта O_{ijk} ; C_{ijkl} - ожидаемая эффективность финансирования при реализации l -го варианта развития объекта O_{ijk} ; a_m - стоимость одного комплекта m -го вида оборудования; C_{ijm} - ожидаемая экономическая эффективность использования одного комплекта m -го вида оборудования ($m=\overline{1,n}$) в j -м строительном управлении i -го треста.

Введем следующие дискретные переменные: $x_{ijkl}=1$, если реализован l -й вариант развития объекта O_{ijk} ; $x_{ijkl}=0$, в противном случае; y_{ijm} - число комплектов m -го вида оборудования ($m=\overline{1,n}$), приобретаемых j -м строительным управлением i -го треста за период планирования.

Задача приобретает следующую формулировку:
максимизировать

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} c_{ijkl}x_{ijkl}+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{n} c_{ijm}y_{ijm} \qquad (I.14)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} a_{ijkl}x_{ijkl}+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{n} a_m y_{ijm}\le \mathcal{D} \qquad (I.15)$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} a_{ijkl}x_{ijkl}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{n} a_m y_{ijm}\le \mathcal{D}_i;\ i=\overline{1,t} \qquad (I.16)$$

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} a_{ijkl}x_{ijkl}+\sum_{m=1}^{n} a_m y_{ijm}\le \mathcal{D}_{ij};\ i=\overline{1,t};\ j=\overline{1,s} \qquad (I.17)$$

$$c_{ijkl}, a_{ijkl}\geqslant 0;\ \sum_{l=1}^{p} x_{ijkl}=1;\ x_{ijkl}=0\vee 1;\ y_{ijm}\in N\cup 0 \qquad (I.18)$$

где $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_{ij}$ - заданные объемы капитальных вложений, предоставляемых, соответственно, главку, трестам и строительным управлениям.

Приведенная задача называется в экономико-математической литературе блочной задачей о выборе (БЗВ). Она является частным случаем задачи 3, но представляет самостоятельный интерес вследствие своей наглядности и широкой области практического использования.

Задача 5. Во всех рассмотренных моделях в целевых функциях не учитывалось незавершенное строительство. Это приводит к тому, что организации не заинтересованы в создании задела и, следовательно, при составлении двухгодовых и годовых планов крупные объекты вообще не будут включаться в план. Нельзя также оценивать эффективность капитальных вложений по общему объему строительно-монтажных работ, поскольку это может привести к неоправданному увеличению объема незавершенного строительства и распылению средств, что противоречит линии партии и правительства, направленной на повышение эффективности капитальных вложений. Для того чтобы избежать указанных недостатков, имеется несколько путей. Первый состоит в том, чтобы увеличить горизонт планирования и рассматривать задачу в динамическом аспекте. Однако в действительности строительные организации составляют двухгодовые, а чаще только годовые планы в связи с тем, что им неизвестен набор объектов, строительство которых они будут вести в последующие годы. Второй путь состоит в том, чтобы накладывать некоторые дополнительные ограничения на объем незавершенного строительства и на необходимые заделы. Третий путь, который представляется более перспективным, заключается в построении такой модели, целевая функция которой учитывает объем незавершенного строительства, но одновременно стимулирует производство товарной продукции - готовых объектов или этапов. При этом в целевой функции и ограничении каждому объекту соответствует два слагаемых, первое из которых пропорционально выполненному на объекте объему СМР, а второе связано с завершенным строительством. Формально задача 5 записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{c}^1 v_i + \tilde{c}^2 w_i) \to max \qquad (I.19)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\tilde{a}_i^1 v_i + \tilde{a}_i^2 w_i) \le B \tag{I.20}$$

$$\tilde{c}_i^1, \tilde{c}_i^2, \tilde{a}_i^1, \tilde{a}_i^2 \ge 0;\ 0 \le w_i \le v_i \le \overline{v_i};\ w_i = 0 \vee \overline{v_i};\ i = \overline{1,n} \tag{I.21}$$

где: $\overline{v_i}$ и v_i – соответственно, общий и включаемый в план объемы СМР на i -м объекте; $\tilde{c}_i^1(\tilde{a}_i^1)$ – эффективность (затраты капитальных вложений), пропорциональная выполненному на i -м объекте объему СМР; $\tilde{c}_i^2, \tilde{a}_i^2$ – соответственно, премия за готовый объект и затраты капитальных вложений, необходимые для начала эксплуатации объекта, не связанные со строительством. Заметим, что условия $w_i \le v_i$ и $w_i = 0 \vee \overline{v_i}$ обеспечивают получение приза только за готовые объекты, а также, что коэффициенты $\tilde{a}_i^2$ обычно связаны с затратами на монтаж оборудования и в ряде случаев могут быть все равными нулю.

Для практических приложений более удобной является следующая форма записи модели:

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i^1 x_i + c_i^2 y_i) \to max \tag{I.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^1 x_i + a_i^2 y_i) \le B \tag{I.23}$$

$$0 \le y_i \le x_i \le 1;\ y_i = 0 \vee 1;\ i = \overline{1,n} \tag{I.24}$$

где: $c_i^1 = \tilde{c}_i^1 \overline{v_i},\ a_i^1 = \tilde{a}_i^1 \overline{v_i},\ c_i^2 = \tilde{c}_i^2 \overline{v_i},\ a_i^2 = \tilde{a}_i^2 \overline{v_i},\ x_i = v_i / \overline{v_i}$

Смысл переменных и коэффициентов этой модели очевиден.

В модели (I.17)-(I.19) в качестве товарной продукции рассматривались только готовые объекты. При возведении крупных промышленных объектов, строительство которых осуществляется в несколько этапов, а особенно при жилищном строительстве, когда эксплуатация отдельных жилых домов, дорог, магазинов и др. может быть начата задолго до окончания строительства микрорайона, учет в целевой функции только готовых объектов существенно огрубляет модель. Для того чтобы избежать этого, предлагается модель с несколькими доплатами, отвечающими каждая своему этапу:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} c_i^j z_i^j \rightarrow max \qquad (I.25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} a_i^j z_i^j \leq B \qquad (I.26)$$

$$0 \leq z_i^0 \leq \overline{v_i}\,;\ v_i^1 \leq v_i^2 \leq \ldots \leq v_i^{m_i} = \overline{v_i}\,;\ z_i^j \leq z_i^0;\ z_i^j = 0 \vee v_i^j;\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m_i} \qquad (I.27)$$

Здесь: $\overline{v_i}$ – объем строительно-монтажных работ (СМР) на i -м объекте; $v_i^j\ (j=\overline{1,m_i})$ – объем СМР на j -м этапе i -го объекта; m_i – количество этапов возведения i -го объекта. Смысл остальных коэффициентов и переменных ясен из предыдущих моделей.

Все перечисленные выше модели применяются в том случае, когда капитальные вложения осуществляются одной организацией. На практике часто возникают ситуации, когда капитальные вложения в один объект или в группу объектов осуществляются несколькими организациями. Еще более частой является ситуация, когда строительство одного объекта или группы объектов ведется несколькими организациями, одна из которых является генподрядчиком. В этом случае организации, осуществляющие вспомогательные работы, существенно влияют на деятельность генподрядной организации. Для учета этого влияния применяется задача с фиксированными доплатами в следующей постановке:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} (c_i' u_i + c_i'' \, sign\, u_i) \rightarrow max \qquad (I.28)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' u_i + a_i'' \operatorname{sign} u_i) \le B \qquad (I.29)$$

$$c_i', c_i'', a_i', a_i'' \geqslant 0; \; u_i \in G_j; \; j=1,2,3; \; i=\overline{1,n} \qquad (I.30)$$

где

$$G_1 = [0;1] \qquad (3ФД1) \qquad (I.3I)$$

$$G_2 = R^+ \cup 0 \qquad (3ФД2) \qquad (I.32)$$

$$G_3 = N \cup 0 \qquad (3ФД3) \qquad (I.33)$$

Задачи ЗФДI, ЗФД2, ЗФД3 позволяют описывать различные хозяйственные ситуации. Смысл переменных и коэффициентов модели (I.28)-(I.30) ясен из рассмотрения предыдущих моделей. Эффективные приближенные алгоритмы для задач с фиксированными доплатами строятся в третьей главе настоящей работы, причем рассматриваются только ЗФДI, ЗФД2, ЗФД3, поскольку рассмотрение задачи (I.I9)-(I.2I), (или, что то же самое) задачи (I.22)-(I.24) аналогично рассмотрению ЗФДI, а при построении эффективного приближенного алгоритма для задачи (I.25)-(I.27) возникают дополнительно лишь незначительные технические трудности.

Задача 6. При решении задачи распределения капитальных вложений и формирования портфеля заказов для небольших организаций, а также при рассмотрении задач, связанных с составлением графика движения ресурсов (бригад, машин и механизмов), возникает задача увязки строительства объектов во времени.

Простейшей, но тем не менее распространенной задачей такого типа является следующая. Пусть имеется n объектов, строительство которых может осуществляться одним исполнителем (например, строительным управлением или комплексной бригадой). Для каждого объекта известны продолжительность строительства (t_i), директивный срок завершения (T_i) и штраф за невыполнение к директивному сроку (d_i). Требуется установить такой порядок возведения объектов, при котором сумма штрафов за запаздывание строительства минимальна. Т.е. требуется найти перестановку $\pi=\{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n\}$ чисел $\{1,2,\dots,n\}$, доставляющую минимум выражению $\sum_{i=1}^{n}\tau_{\pi_i} d_{\pi_i}$ где τ_{π_i} равно нулю, при $\sum_{j=1}^{\pi_i} t_i \le T_i$ и равно единице в противном случае. Эта задача сводится к следующей:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min \tag{I.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant B_j\ ;\ j=\overline{1,n} \tag{I.35}$$

$$c_i, a_i \geqslant 0\ ;\quad x_i = 0 \vee 1\ ;\quad i=\overline{1,n} \tag{I.36}$$

Коэффициенты этой модели c_i , a_i и B_j определенным образом (см., например, / 44 /) могут быть получены из величин t_i, T_i и d_i . Равенство переменной x_i единице (нулю) означает, что i -й объект включается (соответственно не включается) в план. Методы решения этой задачи разрабатываются во второй главе работы.

Задача 7. Отметим, что задачи распределения капитальных вложений тесно связаны с задачами формирования двухгодичного и годового планов строительных организаций, а также с задачами календарного планирования, поскольку четкое составление и выполнение этих планов и обеспечивает эффективное решение проблем, связанных с распределением и использованием капитальных вложений. В задачах формирования двухгодичного, годового и календарных планов фактор времени играет все большую роль. Возникает необходимость учитывать ограничения по нескладируемым ресурсам, в том числе: ограничения по трудовым ресурсам; ограничения по используемым машинам и др. Учет таких ограничений существенно усложняет математическую постановку и решение задач планирования. Точное решение указанных задач невозможно не только из-за их вычислительной сложности, но и из-за того, что необходимую для их решения информацию к моменту составления планов можно получить лишь частично, причем получаемые данные не являются достоверными. Отметим также, что задачи составления планов крупных строительных организаций имеют стохастический характер, так как скорость строительного процесса существенно зависит от погодных условий и других вероятностных факторов. Вероятностный подход к решению задач календарного планирования используется в третьем параграфе третьей главы, в котором подробно рассматривается связь задач распределения капитальных вложений и задач календарного планирования и математические постановки возникающих задач.

Приведенные в главе модели задач распределения капитальных вложений являются простейшими базовыми моделями. С помощью их различных комбинаций можно строить сложные модели, адекватные конкретным хозяйственным ситуациям. Так, при создании автоматизированной системы управления для Главмосинжстроя была выявлена целесообразность использования модели (I.I0)-(I.I3) при пятилетнем планировании на уровне Главка; модели с фиксированными доплатами и иерархической структурой строительных объектов (модель (I.I9)-(I.2I) совместно с условиями, аналогичными (I.9) и (I.I2)) при двухгодичном и годовом планировании на уровне Главка; узкоблочной модели с фиксированными доплатами и иерархической структурой строительных объектов (модель (I.I9)-(I.2I) (I.6) (I.I2)) на уровне треста; модели (I.8)-(I.9), (I.34)-(I.36), а также методов увязки задач распределения капитальных вложений с задачами календарного планирования из третьего параграфа третьей главы при планировании на уровне СУ. В качестве другого примера можно привести министерство мелиорации и водного хозяйства. При создании АСУ для этого министерства оказалось целесообразным использовать при планировании на уровне министерства и главков, а также при пятилетнем планировании на уровне трестов модель (I.I0)-(I.I3) с целевой функцией из модели (I.28)-(I.30); при годовом и двухгодичном планировании на уровне треста модели (I.I9)-(I.2I) (I.6) (I.9) (I.I2); при планировании на уровне СУ модели (I.8)-(I.9) с целевой функцией из модели (I.22)-(I.24), а также модели (I.34)-(I.36).

В заключении главы отметим следующее.

I. В главе приведен достаточно богатый набор моделей, обеспечивающих адекватное описание ключевых ситуаций, возникающих при решении проблемы распределения капитальных вложений. В работе не ставится задача дальнейшего усложнения и детализации моделей, поскольку нашей целью служит как раз достижение максимальной простоты и универсальности представления разнообразных задач оптимизации планирования капитальных вложений. Как видно уже из краткого рассмотрения, указанный комплекс задач дискретной оптимизации достаточно полно описывает типовые ситуации и постановки задач распределения капитальных вложений, а также позволяет учесть наиболее важные моменты, связанные со спецификацией отраслевой структуры и обеспечения межотраслевого взаимодействия. Важными достоинствами предложенного комплекса являются: ориентация на конечный экономический эффект, простота получения исходной информации, а также возможность работы в диалоговом режиме. Опыт использования и внедрения рассмотренных задач показал, что они являются эффективным средством, позволяющим улучшить качество решения задач РКВ.

2. Теоретические основы задач дискретной оптимизации достаточно хорошо разработаны, однако практическое решение этих задач наталкивается на значительные вычислительные трудности. Это свя-

зано не только с особенностями информационной базы экономических задач, но в значительной степени определяется внутренней природой задач дискретной оптимизации. Поэтому актуальной является разработка эффективных методов решения задач дискретной оптимизации, а также исследование условий и оценок практической разрешимости указанных задач за приемлемое время, что позволило бы использовать расчеты по моделям дискретной оптимизации в рабочем режиме практики планирования с целью проработки и выбора наилучших вариантов распределения и использования капитальных вложений. Этому и посвящены, в основном, следующие главы.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

Как было отмечено выше, рассмотренные ЗРКВ относятся к классу дискретных оптимизационных задач. К этому же классу относятся и многие другие проблемы принятия решений в экономических и технических системах и в связи с этим большое практическое значение приобретает развитие методов решения сложных дискретных задач и создание для них эффективного программного обеспечения.

Для того чтобы объективно оценить вычислительные возможности алгоритмов, принято сравнивать две важнейшие их характеристики - трудоемкость и память.

Трудоемкость или время работы алгоритма - это число машинных операций, которое требуется для решения задачи с помощью рассматриваемого алгоритма. При этом следует уточнить, какова длина слов, над которыми производятся машинные операции. Чтобы не останавливаться здесь на этом вопросе, можно считать, что имеются в виду поразрядные операции, т.е. операции над символами 0 и I.

Память алгоритма - это объем памяти ЭВМ, используемый при реализации алгоритма.

Эффективными принято называть такие алгоритмы, у которых трудоемкость и память являются степенными функциями от размерности задачи. Размерность дискретной задачи - это длина двоичной записи всех ее исходных данных. Можно привести убедительные доводы в пользу такого определения эффективности, если исходить из позиций программирования.

Алгоритм будем считать неэффективным, если он состоит в переборе всевозможных вариантов, число которых экспоненциально относительно размерности задачи. Такой перебор оказывается практически неосуществимым в задачах большой размерности.

При всем разнообразии дискретных задач давно была отмечена присущая им особенность: переборные неэффективные алгоритмы строятся для них достаточно легко, и в то же время для большинства из них до сих пор неизвестны эффективные точные методы решения. Отмеченная особенность хорошо согласуется с теоретическими работами последних лет, в которых показано, что возникающие здесь вычислительные трудности носят принципиальный характер и не зависят от мастерства программиста. Этот факт вытекает из теории вычислительной сложности / 39, 42, 43 /.

Основными понятиями в этой теории являются понятия класса P и класса NP. Класс P – это задачи, распознаваемые детерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное число шагов; класс NP – это задачи, распознаваемые недетерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное число шагов. С практической точки зрения эти понятия можно интерпретировать так: в класс P входят дискретные задачи распознавания, решаемые на современных ЭВМ эффективно, т.е. за полиномиальное время, а в класс NP – все задачи распознавания, которые решаются с помощью перебора всех перестановок или конечномерных булевых векторов.

В исследовании сложности задач за последние годы получены интересные результаты. Оказалось, что существуют "эталоны" задачи распознавания свойств, называемые NP-полными, или универсальными. Эти задачи являются в некотором смысле "самыми трудными" среди всех дискретных задач распознавания. В неформальных терминах это означает, что имеет место альтернатива: либо NP-полные задачи неразрешимы за полиномиальное время, либо если хотя бы одну из них можно разрешить за полиномиальное время, то и любая дискретная задача распознавания может быть решена за полиномиальное время. К NP -полным относятся уже ставшие классическими задача целочисленного линейного программирования, задачи о коммивояжере, о рюкзаке, о размещении, задачи составления расписаний, об упаковках и покрытиях и сотни других. Широко распространена (но не доказана) гипотеза, что на самом деле имеет место первая версия альтернативы: все эти задачи вообще неразрешимы за полиномиальное время. Аналогичные результаты верны и для дискретных оптимизационных задач. В этом случае аналогом класса NP является класс $N\Pi$, а аналогом NP -полных задач являются $N\Pi$-трудные задачи / 27 /.

Для доказательства того, что какая-либо задача дискретной оптимизации из класса $NP(N\Pi)$ относится к классу NP -полных ($N\Pi$-трудных) задач, достаточно показать, что ее полиномиальная разрешимость влечет за собой существование полиномиального алгоритма для некоторой эталонной задачи. Вследствие этого нетрудно видеть, что все рассмотренные в первой главе ЗРКВ являются $N\Pi$ -трудными, т.к. их частный случай - задача о рюкзаке - относится к классу $N\Pi$ -полных задач / 39 /.

В ситуации, когда точные эффективные алгоритмы для -трудных задач неизвестны, возможны следующие подходы к решению таких задач:

I. Применение точных алгоритмов для решения задач малой размерности. Традиционные точные методы решения дискретных оптимизационных задач -это метод ветвей и границ, схемы динамического программирования и методы отсечений. В работах / I4, I6 / появились новые точные методы решения дискретных оптимизационных задач, создаваемые на основе аппарата аналитической теории чисел.

II. Выявление эффективно разрешимых классов задач. Например, задача о рюкзаке является $N\Pi$-трудной. В то же время для задач о рюкзаке с "малой" правой частью или с "небольшими" коэффициентами целевой функции имеются эффективные точные алгоритмы, поскольку для задачи о рюкзаке построены т.н. псевдополиномиальные алгоритмы с $T \sim O(nB)$, либо $T \sim O(nf^*)$, где: f^* – оптимальное значение целевого функционала.

Ш. Построение эффективных приближенных алгоритмов. В настоящее время разработки приближенных алгоритмов активно ведутся в двух направлениях:

I) поиск алгоритмов малой трудоемкости, дающих оптимальное (или "почти оптимальное") решение "почти всегда", т.е. для абсолютного большинства задач из рассматриваемого класса. Обзор результатов, полученных в русле этого направления, дан в работах / 28, 6I /;

2) поиск алгоритмов малой трудоемкости, вырабатывающих априорные гарантированные оценки оптимального значения целевого функционала, а также алгоритмов, дающих "почти оптимальное" решение (т.е. решение, близкое в том или ином смысле к оптимальному) при любых значениях исходных данных задачи.

В настоящей работе основное внимание уделяется алгоритмам второго направления. Их характеристики будут оцениваться для самого худшего случая, т.е. при любых изменениях исходных данных.

§ I. Определения и свойства приближенных алгоритмов для дискретных оптимизационных задач.

Рассмотрим сначала несколько подходов к оцениванию точности приближенного решения оптимизационных задач, предложенных в работе автора / 45 / и работах / 54, 85 /.

Определение I. Алгоритм называется ε -приближенным (ε-abs-приближенным) для задачи P , если он по заданному $\varepsilon > 0$ вырабатывает решение $\bar{x}$ такое, что $|f(\bar{x}) - f^*| \le \varepsilon f^*$ ($|f(\bar{x}) - f^*| \le \varepsilon$), где f^* – оптимальное значение целевой функции в задаче P, $f(\bar{x})$ – значение целевой функции на решении, вырабатываемом алгоритмом; решение $\bar{x}$ называется ε -приближенным.

Определение 2. Алгоритм называется (ν) -аппроксимирующим $(0 \le \nu \le 1)$ для задачи P, если он по заданному ν, вырабатывает решение $\bar{x}$ такое, что

$$|f(\bar{x}) - f^*| \le \nu\left(\max_{x\in X} f(x) - \min_{x\in X} f(x)\right),$$

где X – множество допустимых решений задачи .

Смысл определения I состоит в том, что ошибка решения оценивается по отношению к искомому оптимуму, в то время как в определении 2 она оценивается относительно погрешности, возможной в самом худшем случае.

Еще один подход к оцениванию качества приближенного решения дискретной задачи состоит в следующем / 45 /.

Пусть требуется решать некоторую дискретную оптимизационную задачу, для определенности пусть это будет задача максимизации. Пусть все допустимые решения x задачи P расположены по невозрастанию величины $f(x)$ и перенумерованы в этом порядке. Объединим в одну группу все решения x, имеющие одинаковое значение $f(x)$.

Определение 3. Назовем K -ым по порядку решением задачи P любое решение $\hat{x}_K$, которое расположено не далее той группы, в которую попадает решение с номером K.

Определение 4. Назовем K -решением задачи P любое решение, которое попадает в первые K групп.

Например, если $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) > f(x_5) = f(x_6) > f(x_7)$ то 2 -решением является любое решение от x_1 до x_6 ; вторым по порядку решением является любое решение от x_1 до x_4, а шестым по порядку решением будет любое решение от x_1 до x_6.

Очевидно, что K -ое по порядку решение $\hat{x}_k$ задачи будет одновременно ее K -решением. Ниже будет показано, что нахождение K -решения для $N\Pi$ -трудных задач не проще, чем их точное решение в том смысле, что существование полиномиального алгоритма нахождения K -решения влечет за собой полиномиальную разрешимость исходной задачи.

Определение 5. Полиномиальный приближенный алгоритм назовем быстрым, если его трудоемкость и память оцениваются сверху полиномом относительно n и $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, если оценка имеет вид $C_1\frac{n^3}{\varepsilon}+C_2\frac{n}{\varepsilon^2}$, то такой алгоритм - быстрый; если же трудоемкость алгоритма $O(n^{\frac{1}{\varepsilon}})$, то он не является быстрым.

Определение 6. Задача называется сильно универсальной, если нахождение для нее ε -приближенного решения является $N\Pi$ -трудной задачей при некотором $\varepsilon>0$.

Отметим некоторые особенности приближенных алгоритмов.

I. Поиск приближенного алгоритма для многих $N\Pi$-трудных задач - столь же сложная проблема, как и поиск точного алгоритма.

II. Преобразования условий задачи, "эквивалентные" с точки зрения точного решения, приводят к существенно различным приближенным постановкам.

III. Ряд $N\Pi$ -трудных задач, "не допускающих" эффективных точных алгоритмов, могут быть эффективно решены приближенно.

Рассмотрим подробнее перечисленные свойства.

I. В работе / 46 / Э.М.Лившиц показал, что для некоторых сетевых задач теории расписаний получение приближенного решения с абсолютной погрешностью h (h - любое заданное целое положительное число) столь же сложно, как и получение точного решения. В работе / 54 / Р.Г.Нигматуллин получил аналогичный результат для ряда комбинаторных и графовых задач: о максимальной клике, о раскраске графа, о вершинном покрытии, о покрытии кликами, о максимальном разрезе, о покрытии множествами, об упаковке множеств, о гамильтоновом контуре, для задачи минимизации дизъюнктивной нормальной формы. Очевидно, что в этот список можно включить задачи целочисленного линейного программирования, о дереве Штейнера, задачу Джонсона из теории расписаний и многие другие / 44 /. Основная идея доказательства указанного результата состоит в построении $h+1$ копий графа (возможно, связанных специальным образом) или в умножении целевой функции на $h+1$. Если некий алгоритм дает погрешность h в полученной задаче, то этот же алгоритм обязан вырабатывать точное решение в исходной задаче.

Аналогичный факт для относительной погрешности был получен С.Сахни и Т.Гонзалесом / 102 /. Они привели список из 10 задач, для которых искать ε -приближенное решение для любого заданного $\varepsilon > 0$ столь же трудно, как и точное. К их числу относятся задача о коммивояжере, не удовлетворяющая "неравенствам треугольника", задача о многопродуктовом потоке в сети, задача булева программирования, некоторые задачи о разрезании, о покрытии графа циклами, обобщения задачи о назначениях. Ниже будет показано, что это свойство справедливо для задачи о камнях, сформулированной в терминах абсолютной величины разности. Покажем, что это свойство справедливо для следующей задачи о размещении строительных объектов (задача А) / 86 /:

$$f_A(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} d_j y_j \to max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad 0 \le x_{ij} \le y_j \le 1; \quad 1 \le \sum_{j=1}^{n} y_j \le K \qquad (2.2)$$

$$x_{ij}, y_{ij} = 0 \vee 1; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \qquad (2.3)$$

Докажем, что нахождение ε -приближенного решения задачи А, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, является $N\Pi$ -трудной задачей. Для этого рассмотрим помимо задачи А две вспомогательные задачи В и С.

Задача В: заданы числа K, R, d_j, c_{ij}, где $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Требуется определить, существует ли решение $\{x_{ij}, y_j\}$, удовлетворяющее условиям (2.2), (2.3) и условию:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} d_j y_j \geqslant R \qquad (2.4)$$

Задача С отличается от задачи В только тем, что она решается не для любых значений R, а только с $R=0$.

Покажем, что существование полиномиального точного алгоритма для задачи С влечет за собой наличие таких алгоритмов для задач В и А. Действительно, пусть задана задача В. Построим по ней задачу С=С(В) такую, что задача В имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача С. Задачу С = С(В) определим следующим образом: $c'_{ij} = nc_{ij} - y_j$, $d'_j = nd_j$. Легко видеть, что если задача С(В) имеет решение, то и задача В имеет то же самое решение, и наоборот. Таким образом, если имеется полиномиальный алгоритм для задачи С, то полиномиальный алгоритм имеется также для задачи В. Далее, если мы умеем за полиномиальное время решать задачу В, то с помощью дихотомии сможем за полиномиальное время решить и задачу А. Вместе с тем про задачу А известно, что она относится к классу $N\Pi$ -трудных / 86 /. Следовательно, задача С относится к классу NP -трудных.

Покажем теперь, что существование полиномиального ε -приближенного алгоритма для задачи А (с любым $\varepsilon > 0$), влечет за собой наличие полиномиального точного алгоритма для задачи С. Для этого рассмотрим задачу А, в которой $c_{ij} = c'_{ij}$, а $d_j = d'_j$.

Нетрудно видеть, что если $(\bar{x}, \bar{y})$ - ε -приближенное решение этой задачи и $f_A(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, то $(\bar{x}, \bar{y})$ является также решением задачи С. В случае же $f_A(\bar{x}, \bar{y}) < 0$, задача С не имеет решения. Поскольку задача С принадлежит к классу NP -трудных, ясно, что существование полиномиального ε -приближенного алгоритма для задачи А (с каким-либо $\varepsilon > 0$) влечет за собой существование полиномиальных алгоритмов для всех задач из класса $N\pi$. Отметим, что для задачи А в / 86 / построен (ν) -аппроксимирующий алгоритм с $\nu = \frac{1}{e}$.

Принципиальные вычислительные трудности появляются и при конструировании полиномиальных (ν) -аппроксимирующих алгоритмов. Например, для задачи о коммивояжере, даже если для нее выполняется неравенство треугольника, построение быстрого (ν) -аппроксимирующего алгоритма невозможно, если $P \neq NP$. Для доказательства этого факта построим по произвольной задаче о гамильтоновом контуре задачу о коммивояжере следующим образом: расстояние d_{ij} между городами i и j берем равным единице, если вершины i и j в исходном графе соединены ребром; $d_{ij} = 2$ в противном случае. Здесь неравенства треугольника очевидно выполняются, и $\max\limits_{x \in X} f(x) - \min\limits_{x \in X} f(x) < n(n-1)$. В случае существования гамильтонова контура в исходном графе оптимальное значение целевой функции в задаче о коммивояжере будет равно n , а в противном случае будет больше (либо равно), чем $n+1$.

Пусть теперь имеется быстрый (ν) -аппроксимирующий алгоритм для задачи о коммивояжере. Из определений 2 и 5 ясно, что при $\nu = \frac{1}{n^2}$, этот алгоритм за полиномиальное время выработает решение $\bar{x}$ такое, что $f(\bar{x}) = n$, при $f^* = n$ и $f(\bar{x}) \geq n+1$, при $f^* \geq n+1$, т.е. этот алгоритм позволяет точно решить задачу о существовании гамильтонова контура в графе, которая являет-ся NP -трудной / 39 /, что и доказывает утверждение.

Отметим также, что для задач о покрытии и многих других задач теории графов построение быстрого ε -приближенного (равно как и (ν) -аппроксимирующего) алгоритма возможно лишь в случае $P = NP$, поскольку ε -приближенное решение этих задач при $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ $\left(\nu = \frac{1}{n^2}\right)$ является также их точным решением, в связи с тем, что оптимальное значение целевой функции f^* $\left(\max\limits_{x\in X} f(x) - \min\limits_{x\in X} f(x)\right)$ ограничено числом n^2, а все исходные данные - целые числа. Этот же факт верен и для задачи о банкнотах:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geqslant B_j\ ;\ j=\overline{1,m}\ ;\ x_i = 0 \vee 1\ ;\ i=\overline{1,n} \tag{2.5}$$

В / 35 / доказана универсальность задачи (2.5) уже при $m=2$ (откуда следует отсутствие быстрых ε -приближенного и (ν) - аппроксимирующего алгоритмов для многомерной задачи о рюкзаке) и предлагается для нее алгоритм трудоемкости: $T \sim O(mn + m^2 2^{2m})(m+n)^m$, дающий $(m-1)$ -решение, т.е. приближенное решение, отличающееся от оптимума не более, чем на $m-1$. Однако существование K -решений является скорее исключением, чем правилом. Рассмотрим, например, задачу о максимальном подмножестве, которая является частным случаем задачи о выборе:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant B\ ;\ x_i = 0 \vee 1\ ;\ i=\overline{1,n} \tag{2.6}$$

Докажем, что нахождение K -решения этой задачи является $N\Pi$ -трудной задачей. Для этого покажем, что существование полиномиального алгоритма А, вырабатывающего K -решение для задачи (2.6) влечет за собой полиномиальную разрешимость следующей NP -трудной задачи о разбиении множества / 39 /: существует ли вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $x_i = 0 \vee 1$, такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i (1 - x_i)$?

Рассмотрим следующую задачу Д:

$$\varphi = 2k \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{j=1}^{k-1} x_{n+j} \to max \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \; ; \; x_i = 0 \vee 1 \; ; \; i = \overline{1, (n+k-1)} \qquad (2.8)$$

Применим алгоритм А к задаче Д. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+k-1})$ решение задачи Д, вырабатываемое алгоритмом. Утверждается, что задача о разбиении множеств имеет решение в том и только в том случае, когда $\varphi(\bar{x}) \geqslant k \sum_{i=1}^{n} p_i$. Покажем, что, если это условие выполняется, то вектор $\tilde{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ является решением задачи о разбиении множества. Действительно, предположим противное, т.е., что либо $\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$ либо $\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$.

В первом случае

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i + d, \text{ где } d \geqslant \frac{1}{2}$$

(т.к. p_i -целые). Тогда $2k \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i \geqslant k \sum_{i=1}^{n} p_i + 2dk > k \sum_{i=1}^{n} p_i$, что противоречит предположению о том, что $\bar{x}$ - допустимое решение задачи Д. Во втором случае

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i - d \Longrightarrow$$

$$\varphi(\bar{x}) = k \sum_{i=1}^{n} p_i - 2kd + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_{n+j} \le k \sum_{i=1}^{n} p_i - 1 < k \sum_{i=1}^{n} p_i,$$ что и приводит к противоречию.

Пусть теперь $\varphi(\bar{x}) < k \sum_{i=1}^{n} p_i$. Докажем, что в этом случае задача о разбиении множества не имеет решения. Доказательство проведем от противного. Пусть эта задача имеет решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Рассмотрим следующие допустимые решения задачи Д : $(x_1^*, \dots, x_n^*, 1, 0, \dots, 0)$, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (x_1^*, \dots, x_n^*, 1, 1, \dots, 1)$. Значения целевой функции задачи Д на этих решениях: $k \sum_{i=1}^{n} p_i$; $k \sum_{i=1}^{n} p_i + 1$; ... ; $k \sum_{i=1}^{n} p_i + k - 1$.

Таким образом, нами получено K допустимых решений задачи Д, на которых значение целевой функции больше, чем $\varphi(\bar{x})$, что противоречит предположению о том, что $\bar{x}$ является K -решением задачи Д.

Аналогичные результаты о сложности нахождения K -решения получены в работах автора / 26, 45 / для задачи о коммивояжере и ряда других. Перейдем теперь к рассмотрению второго свойства приближенных алгоритмов.

П. Преобразования условий задачи,"эквивалентные" с точки зрения получения точного решения, могут привести к существенно различным приближенным постановкам.

Такие ситуации могут возникнуть при прибавлении константы к целевой функции, при преобразовании $\max f = -\min(-f)$, при возведении целевой функции в квадрат, при замене переменных, при замене ограничений в виде неравенств на ограничения в виде строгих равенств / 44 /.

Например, рассмотрим задачу о разбиении множества. Приводимые ниже три формулировки эквивалентны с точки зрения точного решения, т.е. все они дают точное решение задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \Big| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i ; \; x_i = 0 \vee 1 \qquad (2.9)$$

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - x_i) \Big| \to \min \Big| x_i = 0 \vee 1 \qquad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + c \to \min \Big| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i ; \; x_i = 0 \vee 1 \qquad (2.11)$$

Для задачи (2.9) ε -приближенное решение можно получить с трудоемкостью $O(\frac{n}{\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. следующий параграф), в то время как нахождение такого решения для задач (2.10) или (2.11) является $N\Pi$ -трудной проблемой (см. работу автора /44/).

В качестве другого примера можно привести треугольную задачу о рюкзаке (I.34)-(I.36), для которой оценки ε -приближенных алгоритмов различны при рассмотрении задачи в максимизационной и в минимизационной постановках / 44 /, что связано с трудностью получения априорных гарантированных оценок целевой функции для минимизационных задач.

Третье свойство приближенных алгоритмов рассматривается в следующих параграфах этой главы, а также в третьей главе работы, где для задач распределения капитальных вложений строятся быстрые ε -приближенные алгоритмы.

§ 2. Методы построения ε -приближенных алгоритмов.

Условно можно выделить следующие группы методов, лежащих в основе конструирования быстрых ε -приближенных алгоритмов: методы шкалирования, методы разбиения на интервалы / I0I / и метод экономного прореживания / 44 /. Все упомянутые группы методов основаны на принципе динамического программирования. Приведем сначала базовую динамическую процедуру для задачи выбора (I.I)-(I.3), которая в той или иной модификации используется почти во всех перечисленных методах.

Базовая динамическая процедура (БДП) заключается в последовательном генерировании списков всевозможных допустимых комбинаций "эффекта" и затрат. Эта процедура состоит из $(n+1)$-го шага. Первоначально список состоит из одной пары $(0,0)$. Затем, на k -й итерации ($k=\overline{1,n}$), из каждой пары (C,A) такой, что $A+a_k \le B$, полученного на $(k-1)$-й итерации списка $\mathcal{L}_{(k-1)}$, формируется новая пара ($C+c_k$, $A+a_k$). Среди всех пар списка $\mathcal{L}_{(k-1)}$ и вновь полученных отбрасываются доминируемые. Из двух пар (C,A) и (C',A') таких, что $C\le C'$, $A\ge A'$ пара

(C , A) считается доминируемой. Оставшиеся пары, упорядоченные в порядке возрастания первой компоненты, и составляют список $\mathcal{L}_k$. Основное свойство формируемых списков заключается в том, что для любой пары (C , A) списка $\mathcal{L}_k$ ($k=\overline{1,n}$) существует булевый вектор $x^k=(x_1^k, x_2^k,\dots, x_k^k)$ такой, что $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i^k = C$ и $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^k = A$, а для любого булева вектора $\bar{x}^k=(\bar{x}_1^k,\bar{x}_2^k,\dots,\bar{x}_k^k)$ в списке $\mathcal{L}_k$ найдется набор (C', A') такой, что $\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{x}_i^k \le C'$ и $\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i^k \geq A'$. Из этого свойства следует, что последняя пара последовательности $\mathcal{L}_n$, полученной на последней итерации, есть (f^*, A^*), где f^* - оптимальное значение целевой функции, а A^* - минимальный допустимый уровень затрат при суммарном эффекте f^* . Нетрудно убедиться, что трудоемкость БДП: $T \sim O(nf^*)$. Описанная БДП представляет собой алгоритм точного решения задачи выбора. Этот алгоритм не является полиномиальным, т.к. в оценку трудоемкости входит f^* . Такие алгоритмы называются псевдополиномиальными.

Более подробное описание процедуры, а также метод восстановления решения (т.е. булева вектора $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ такого, что $\sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{x}_i = f^*$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}_i = A^*$) можно найти, например, в / 99 /.

Перейдем теперь к подробному описанию методов построения ε -приближенных алгоритмов. Опишем их на примере задачи о выборе и задачи о максимальном подмножестве (2.6).

I. Метод шкалирования. Для применения этого метода необходимо наличие априорной гарантированной целевой функции (АГО), т.е. величины $\hat{f}$ такой, что $\hat{f}/c \le f^* \le \hat{f}$, где c - константа либо полином от размерности задачи. Методы построения АГО рассматриваются в следующем параграфе, здесь же мы считаем $\hat{f}$ известной.

Метод шкалирования состоит в огрублении исходных данных задачи таким образом, что получается новая задача, которую с полиномиальной трудоемкостью можно решить точными методами и по точному решению которой можно восстановить ε -приближенное решение исходной задачи.

Рассмотрим, например, задачу выбора, в которой c_i $(i=\overline{1,n})$ заменены на $c_i' = \lfloor \frac{c_i}{M} \rfloor$ (задача E). Пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ - оптимальное решение задачи E. Это решение является допустимым для задачи (I.I)-(I.3), причем $f^* - f(\tilde{x}) \le nM$. Очевидно, что трудоемкость точного решения задачи E с применением БДП: $T \sim O\left(\frac{nf^*}{M}\right)$. При $M = \frac{\varepsilon \hat{f}}{cn}$ получаем $T \sim \left(\frac{cn^2}{\varepsilon}\right)$, а $f^* - f(\tilde{x}) \le nM = \frac{\varepsilon \hat{f}}{c} \le \varepsilon f^*$, т.е. $\tilde{x}$ является ε -приближенным решением задачи (I.I)-(I.3). Поскольку для этой задачи в АГО $c = 2$, мы получаем: $T \sim O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$.

В работах / 93, 99 / разработаны модификации метода шкалирования, позволяющие получить ε -приближенное решение задачи выбора за $O(n/\varepsilon^2 + n\log n)$ (в / 93 /) и за $O(n\log 1/\varepsilon + 1/\varepsilon^4)$ (в / 99 /).

Модификация метода шкалирования, предложенная в / 93 /, состоит в том, что все номера переменных (от I до n) разбиваются на два подмножества. В одно из них (множество J) входят те, для которых $c_i > \frac{\varepsilon \hat{f}}{2c}$, а в другое - остальные. Затем задача решается только на множестве J, причем в методе шкалирования берется $M = \frac{\varepsilon^2 \hat{f}}{4c^2}$. Это связано с тем, что в допустимое решение входит не более $\frac{2c}{\varepsilon}$ ненулевых переменных с номерами из J и, следовательно, погрешность за счет округления не превзойдет $\frac{\varepsilon f^*}{2}$. После получения всевозможных допустимых решений в результате применения метода шкалирования для задачи (I.I)-(I.3) на множестве J, ε -приближенное решение исходной задачи получается путем использования оставшихся объемов капитальных вложений для строительства тех объектов из множества $\{1,2,\ldots,n\} \setminus J$, у которых максимально отношение "эффекта" к затратам (c_i/a_i). Погрешность, возникающая на втором этапе решения задачи не превосходит $\max\{c_i / i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus J\} \leq \frac{\varepsilon \hat{f}}{2c} \leq \frac{\varepsilon f^*}{2}$ и, следовательно, общая погрешность не превосходит εf^*. Трудоемкость первого этапа: $T \sim O\left(\frac{nf^*}{M}\right) \sim O\left(n \frac{4cf^*}{\varepsilon^2 \hat{f}}\right) \sim O\left(\frac{n}{\varepsilon^2}\right)$, а трудоемкость второго: $T \sim O(n \log n)$.

В работе / 99 / предложен "улучшенный" метод шкалирования, основанный на том, что округление различных коэффициентов с номерами из J производится по разному – чем больше коэффициент, тем грубее округление. А именно, если $c_i \in [2^k\Delta ; 2^{k+1}\Delta[$, где $\Delta = \frac{\varepsilon \hat{f}}{c}$, то $c_i' = \left\lfloor \frac{c_i}{2^k M} \right\rfloor \cdot 2^k$. Оказывается, что такое округление также не выводит за рамки ε-приближенного решения, а количество переменных, которое необходимо рассматривать, уменьшается до $\frac{3c^2}{\varepsilon^2}$ за счет того, что среди элементов с одинаковыми значениями c_i' рассматривается не более $2\frac{c^2}{\varepsilon^2 c_i'}$ элементов, имеющих наименьшие значения a_i. Для небулевой задачи о рюкзаке удается с использованием "улучшенного" метода шкалирования получить ε-приближенный алгоритм с трудоемкостью: $T \sim O\left(n + \frac{1}{\varepsilon^3}\right)$.

П. Суть методов разбиения на интервалы состоит в том, что после выполнения очередной итерации динамической процедуры, среди всех решений, попавших в один интервал, выбирается одно, в некотором смысле "наилучшее", а остальные решения, попавшие в этот интервал, отбрасываются. Благодаря этому при переходе к следующему шагу алгоритма рассматривается последовательность решений, содержащая не больше элементов, чем выбрано интервалов.

Различаются статический и динамический методы разбиения на интервалы. При применении статического метода длина интервалов одинакова на всех шагах алгоритма, а для ее определения используется АГО. Этот метод состоит в том, что интервал $[0; \hat{f}]$ разбивается на M подинтервалов одинаковой длины: $[0;\Delta[; [\Delta;2\Delta[; \ldots; [(M-1)\Delta; \hat{f}]$ и затем, после образования новых пар на k -й итерации БДП, среди всех пар, попавших в один и тот же интервал, выбирается пара с минимальным значением второй компоненты, а остальные отбрасываются. Вследствие этого трудоемкость алгоритма будет: $T \sim O(nM)$ ($(n+1)$ - шаг БДП, на каждом из которых производится $O(M)$- действий). Погрешность алгоритма $\delta \le n\Delta = \frac{n\hat{f}}{M}$. Следовательно, положив $M = \frac{nc}{\varepsilon}$ мы получим: $\delta \le \frac{n\hat{f}\varepsilon}{nc} \le \varepsilon f^*$, а $T \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$. Для восстановления решения может применяться метод обратного хода / 99 /.

Заметим, что метод статического разбиения на интервалы менее эффективен на практике, чем метод шкалирования, поскольку при его использовании арифметические действия производятся с числами меньшей размерности. Вообще, если учитывать длину записи чисел, оценки статического метода разбиения на интервалы будут: $T = M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon}\log B)$, а оценки метода шкалирования: $T = M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon}\log\frac{n}{\varepsilon} + n\log B)$. Поэтому, если для решения задачи могут применяться оба этих метода, то используется метод шкалирования.

Динамические методы разбиения на интервалы применяются в тех случаях, когда отсутствует АГО. Имеется два основных метода.

Первый метод разработан в / 101/и применяется исключительно для решения максимизационных задач. Этот метод отличается от предыдущего тем, что после k -й итерации БДП в списке $\mathcal{L}_k$ выбирается пара с наибольшей первой компонентой (C^k, A^k) и на M подинтервалов одинаковой длины (Δ_k) разбивается интервал $[0; C^k]$. Полученная в результате работы алгоритма погрешность (δ) будет меньше либо равна $\sum_{i=1}^{n} \Delta_k \le \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} C^k \le \frac{nf^*}{M}$. Следовательно, положив

$M = \frac{n}{\varepsilon}$, мы получим $\delta \le \varepsilon f^*$, причем трудоемкость алгоритма $T \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$. В отличие от предыдущего алгоритма длина интервала может меняться (увеличиваться) от шага к шагу.

Второй динамический метод разбиения на интервалы предложен в / II, I2 /. Этот метод основан на специфической особенности задач булева программирования, состоящей в том, что все значения функции $P(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid x_i = 0 \vee 1;\ c_i \geq 0;\ i = \overline{1,n}$ можно разбить на ε -группы (считается, что a, b принадлежат одной ε - группе, если $|a-b| / \min(a,b) \le \varepsilon$) так, что число этих групп не превзойдет $n(1 + 1/\log(1+\varepsilon))$. Благодаря этому факту удается построить почти оптимальные алгоритмы для многих задач булева программирования как максимизационных, так и минимизационных. В отличие от предыдущего метода длина рассматриваемых интервалов зависит не только от итерации алгоритма, но и от расстояния верхней границы интервала до начала отсчета. В результате этого трудоемкость алгоритмов несколько увеличивается (например, для задачи выбора $T \sim O(\frac{n^3}{\varepsilon})$). Отметим, однако, что увеличение трудоемкости вызвано тем, что метод не учитывает ограничения ($\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le B$), и вследствие этого обладает большими возможностями, чем предыдущие: позволяет решать не только максимизационные, но и минимизационные задачи, а также позволяет решать задачи в параметрической постановке / 44 /.

Ш. Метод экономного прореживания. Суть этого метода состоит в том, что при определенных условиях некоторые решения, получаемые на очередной итерации БДП, можно отбросить без увеличения погрешности. Это позволяет строить ε -приближенные алгоритмы для ряда важных практических задач с оценками лучшими, чем у предыдущих методов. Следует, однако, отметить, что сфера применения рассматриваемого метода уже, чем других.

Опишем этот метод на примере задачи (2.6). Напомним, что эта задача возникает в случае, когда "эффект" от возведения объектов прямо пропорционален объемам используемых капитальных вложений, а также при распределении строительных объектов между двумя исполнителями / 100 / (в этом случае в задаче (2.6) $B \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i$). Быстрые ε -приближенные алгоритмы для задачи (2.6) конструировались в работах / 93,97,99 /, а также в работах автора / 25,44 /. Оценки алгоритмов: $T \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^4}\log\frac{1}{\varepsilon})$, $M \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^3})$ / 93 /; $T \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^3}\log\frac{1}{\varepsilon})$, $M \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^3}\log\frac{1}{\varepsilon})$ / 97 /; $T = M \sim O(\frac{n}{\varepsilon})$ / 44 /; $T = M \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^3})$ / 25 /; Алгоритм Лаулера, предложенный в работе / 99 /, ошибочен, т.к. округление исходных данных в большую сторону, проведенное в / 99 /, может повлечь за собой потерю ε -приближенных решений.

Перейдем к подробному описанию ε -приближенного алгоритма для задачи (2.6), основанному на методе экономного прореживания. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{i \in \overline{1,n}} p_i \leq B \wedge \sum_{i=1}^{n} p_i > B$ (иначе алгоритм упрощается).

Шаг 0. Положим: $q_0 = S = 0$; $\mathcal{L}_0 = \{q_0\}$; $k=1$.

Шаг I. Если $k > n$, перейти к шагу 2, иначе положить $\mathcal{L} = \emptyset$.

I.I. (k -сдвиг). Для всех j от 0 до S таких, что $q_j + c_k \leq B$, положить $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup (q_j + c_k)$.

I.2. (Объединение последовательностей). В $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_{(k-1)}$, причем сохраняется упорядоченность по неубыванию.

Пусть $\mathcal{L} = \{y_j\}_{j=1}^{M}$, где $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$, а M - количество элементов в $\mathcal{L}$. Положить: $q_0 = y_0$; $j = 1$; $S = 0$.

I.3. (Прореживание). Если $j = M$, положить: $S = S + 1$; $q_S = y_j$; $\mathcal{L}_k = \{q_j\}_{j=0}^{S}$; $k = k+1$ и перейти к шагу I. Если $y_{j+1} \leq q_S + \frac{\varepsilon B}{2}$, положить $j = j+1$ и перейти к I.3. Положить: $S = S+1$; $q_S = y_j$; $j = j+1$ и перейти к I.3.

Шаг 2. С помощью стандартной операции обратного хода от $\mathcal{L}_n$ к $\mathcal{L}_1$ восстанавливаем булев вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} c_i \bar{x}_i = q^S$, где q^S – наибольшее из чисел в $\mathcal{L}_n$.

Тот факт, что $\bar{x}$ является ε-приближенным решением задачи (2.6), непосредственно следует из леммы.

Лемма I. Для любого булева вектора $Z^K = (z_1, z_2, \ldots, z_K)$ для которого $f(z^K) = \sum_{i=1}^{K} p_i z_i \le B$, в последовательности $\mathcal{L}_K$ найдется элемент q_α такой, что $q_\alpha \le f(z^K) \le q_\alpha + \varepsilon f^*$.

Докажем эту лемму по индукции. Для K =I утверждение очевидно. Пусть утверждение выполняется для $K = \ell < n$. Рассмотрим произвольный булевый вектор $Z^{(\ell+1)} = (z_1, z_2, \ldots, z_{(\ell+1)}) : f(z^{(\ell+1)}) \le B$. Ясно, что и для $Z^\ell = (z_1, z_2, \ldots, z_\ell)$ имеем $f(z^\ell) \le B$ и по индуктивному предположению в $\mathcal{L}_\ell$ найдется $q_\alpha \le f(z^\ell) \le q_\alpha + \varepsilon f^*$. Рассмотрим $(\ell+1)$-ю итерацию. По построению алгоритма $q = q_\alpha + z_{(\ell+1)} \in \mathcal{L}$. После проведения прореживания возможны две ситуации:

а) $q \in \mathcal{L}_{(\ell+1)}$. В этом случае утверждение очевидно.

б) $\exists t \in \overline{1,S} : (q_t, q_{t+1} \in \mathcal{L}_{(\ell+1)}) \wedge (q_t \le q \le q_{t+1} \le q_t + \frac{\varepsilon B}{2} < q_t + \varepsilon f^*)$.

В этом случае либо $f(Z^{(\ell+1)}) \le q_{t+1}$, тогда q_t удовлетворяет условиям леммы, либо имеем: $q \le f(z^{(\ell+1)}) \le q + \varepsilon f^* \le q_{t+1} + \varepsilon f^*$, т.е. условиям леммы удовлетворяет q_{t+1}.

Следствие. Если $f(\bar{x}) \le B - \frac{\varepsilon B}{2}$, то $\bar{x}$ – точное решение задачи (2.6).

Оценим трудоемкость алгоритма. По построению алгоритма в $\mathcal{L}_K$ $(K = \overline{1,n})$ для любых двух элементов с соседними нечетными номерами j и $j+2$, при $j \ne M-2$ выполняется $q_{(j+2)} - q_j > \frac{\varepsilon B}{2}$, откуда получаем $S \le \frac{4}{\varepsilon} + 1$ и, следовательно: $T \sim O(\frac{n}{\varepsilon})$. Трудоемкость выполнения "обратного хода": $T \sim O(n \log \frac{1}{\varepsilon})$.

Требуемая для реализации алгоритма память: $M \sim O(\frac{n}{\varepsilon})$, т.к. последовательности $\mathcal{L}_K$ $(K = \overline{1,n})$ необходимо хранить для восстановления решения $\overline{x}$. Заметим, что эту оценку можно улучшить до $O(n+\frac{1}{\varepsilon})$ за счет увеличения трудоемкости до $O(\frac{n^2}{\varepsilon})$. Для этого фиксируется $x_1 = 1$ и решается задача $\sum_{i=2}^{n} p_i x_i \to max \mid \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \leq B - p_1$ с помощью описанного алгоритма. Если полученное значение целевой функции будет меньше, чем при решении исходной задачи, то $\overline{x}_1 = 0$. Продолжая этот процесс, мы восстанавливаем решение за $O(\frac{n^2}{\varepsilon})$ действий, но уже не храним последовательностей $\mathcal{L}_k$ $(k=\overline{1,n})$. Подобная процедура обмена "памяти" на "время" возможна и для многих других задач. Целесообразность ее применения зависит от того, что является ограничивающим фактором: выделяемый объем оперативной памяти либо быстродействие ЭВМ.

Приведем еще один ε -приближенный алгоритм для задачи (2.6), который является развитием предложенного выше и, наряду с техникой экономного прореживания, использует "улучшенный" метод шкалирования из / 99 /.

Шаг I. Положить: $T = \frac{\varepsilon B}{2}$; $k = \frac{\varepsilon T}{2}$.

I.I. Положить: $J_1 = \{i \mid p_i \leq T\}$; $J_2 = \{1,2,\dots,n\} \setminus J_1$.

I.2. Если $2^r T < p_i < 2^{r+1} T$ $(r = 0,1,\dots,\lfloor \log_2 \frac{B}{T} \rfloor$; $i \in J_2)$, положить $\overline{p}_i = \lfloor \frac{p_i}{k 2^r} \rfloor \cdot 2^r$. Среди всех элементов множества J_2 с одинаковыми значениями $\overline{p}_i$, оставить $\lfloor \frac{B}{k \overline{p}_i} \rfloor$ элементов, имеющих наименьшие значения p_i, а остальные исключить из J_2. Нетрудно показать (см. / 99 /), что в множестве J_2 останется порядка $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ элементов, а также, что погрешность, связанная с исключением элементов из J_2, не превзойдет εf^*.

Шаг 2. Используем предыдущий алгоритм для решения задачи $\sum_{i \in J_2} \overline{p}_i x_i \to max \mid \sum_{i \in J_2} \overline{p}_i x_i \leq B$; $x_i = 0 \vee 1$; $i \in J_2$.

В результате этого мы за $O(1/\varepsilon^3)$ действий получаем ее ε -приближенное решение $\widetilde{x} = \{\widetilde{x}_i\}_{i \in J_2}$. Пусть $\varphi = \sum_{i \in J_2} p_i \widetilde{x}_i$

Шаг 3. Определить $i^0 = max\{i \mid i \in J_1 \wedge \varphi + \sum_{j \in J_1 : j \leq i} p_i \leq B\}$.

Берем $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n')$, где

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \tilde{x}_i, \text{ при } i \in J_2, \\ 1, \text{ при } i \in J_1 \cap i \le i_0, \\ 0, \text{ при } i \in J_1 \cap i > i_0. \end{cases}$$

Покажем, что полученный вектор $\bar{x}$ является ε -приближенным решением задачи (2.6). В случае, если $i_0 < n$, это следует из того, что $B - T \le f(\bar{x}) \le B$, откуда $f^* - f(\bar{x}) \le T \le \varepsilon f^*$. В случае $\varphi \le B - T$ задача, рассматриваемая на шаге 2 алгоритма, решается точно (см.следствие из леммы I) и, следовательно, погрешность возникает только при исключении элементов из множества J_2 и опять-таки не превосходит T / 99 /. Если же $\varphi \geq B - T$, то тем более $f(\bar{x}) = \varphi + \sum_{i \in J_1} p_i \geq B - T$, что и требовалось показать.

Несложно видеть, что трудоемкость и память предложенного алгоритма на шагах I и 3 - $O(n)$, а на шаге 2 - $O(1/\varepsilon^2)$, откуда $T = M \sim O(n + 1/\varepsilon^3)$.

Рассмотрим теперь задачу (2.6) с $B \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$, частным случаем которой является задача о разбиении множества / 39 /. Особенностью этой задачи является то, что множество J_2 содержит не более, чем $\frac{2B}{T} = \frac{4}{\varepsilon}$ элементов. Благодаря этому факту алгоритм ε -приближенного решения упрощается. Он имеет оценки $T = M \sim O(n + \frac{1}{\varepsilon^2})$, причем оценка памяти может быть уменьшена до $O(n + \frac{1}{\varepsilon})$ за счет увеличения трудоемкости до $O(n + \frac{1}{\varepsilon^3})$.

Перейдем теперь к рассмотрению условий существования быстрых ε -приближенных алгоритмов.

Лемма 2. Необходимым условием существования быстрого ε - приближенного алгоритма для задачи P с целыми коэффициентами является наличие псевдополиномиального алгоритма.

Для доказательства леммы предположим, что имеется быстрый

ε -приближенный алгоритм $A(\varepsilon)$ решения задачи P и покажем, что для этой задачи имеется и псевдополиномиальный алгоритм. Для этого применим к задаче P алгоритм $A(\frac{1}{2})$, и в результате получим некоторое решение $\tilde{x}: f^*/2 \leq f(\tilde{x}) \leq f^*$ ($f^* \leq f(\tilde{x}) \leq \frac{3}{2}f^*$ для минимизационной задачи). Применив затем к задаче P алгоритм $A(\lceil\frac{1}{2f(\tilde{x})}\rceil)$, мы получим вследствие целочисленности коэффициентов точное решение задачи P с трудоемкостью $T \sim O(\Pi(n,\frac{1}{\varepsilon})) \sim O(\Pi(n,f^*))$, где $\Pi(n,f^*)$ - некоторый полином от размерности задачи и величины f^*, т.е. лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для задач, в которых имеется АГО, а погрешность в результате округления исходных данных является аддитивной, необходимое условие становится также и достаточным.

Заметим, что все рассмотренные выше булевые модели для ЗРКВ удовлетворяют условию леммы 3, т.к. в них изменение какого-либо коэффициента целевой функции на Δ приводит к изменению значения целевой функции, не превосходящему Δ .

Для доказательства леммы 3 достаточно провести округление коэффициентов целевой функции рассматриваемой задачи с $M = \frac{\varepsilon \hat{f}}{nc}$ (где $\hat{f}$ - АГО, а n - количество слагаемых в целевой функции) и решить полученную в результате задачу с помощью псевдополиномиального алгоритма. Несложно показать, что в результате будет получено ε -приближенное решение исходной задачи за полиномиальное от n и $\frac{1}{\varepsilon}$ число действий. Это и доказывает лемму 3.

В заключение отметим, что все рассмотренные в параграфе методы и алгоритмы с небольшими изменениями могут применяться для решения задач в минимизационных постановках, причем оценки алгоритмов не меняются.

Следует также отметить, что при решении конкретных практических задач необходимо выбирать наиболее подходящие методы в зависимости от размерности и требуемой точности.

§ 3. Методы построения априорных гарантированных оценок.

Как отмечалось в предыдущем параграфе, основными методами построения ε -приближенных алгоритмов для комбинаторных задач (особенно, если задачи рассматриваются в минимизационной постановке) являются метод шкалирования и статический метод разбиения на интервалы. Для применения этих методов необходимо иметь априорные гарантированные оценки оптимального значения целевой функции (АГО), чтобы знать, с какой погрешностью можно проводить округление либо какого размера интервалы необходимо рассматривать.

В данном параграфе будут рассмотрены основные методы получения АГО. К ним относятся: процедуры дихотомического типа, метод декомпозиции, обобщенные гриди-алгоритмы, метод релаксации.

I. Процедуры дихотомического типа (Д-процедуры).

С помощью Д-процедур удается получить АГО (см. работы автора / 26, 91 /): для многовариантной задачи выбора (в т.ч. и в минимизационной постановке), для ЗРД2 min (см. следующую главу), для блочной задачи о рюкзаке на минимум, для треугольной задачи о рюкзаке на минимум. Основу Д-процедур составляет расщепляющий алгоритм $PA(M)$, который для числа M либо позволяет выяснить, что $f^* \leq M$, либо устанавливает, что $f^* > \frac{1}{4}M$. С помощью применения расщепляющего алгоритма удается на каждом шаге в два раза уменьшать интервал, содержащий f^*.

Опишем алгоритм получения АГО для многовариантной задачи выбора на минимум, который является наиболее наглядным и в то же время содержит все основные особенности Д-процедур.

Алгоритм состоит из трех подалгоритмов. Первый из них позволяет получить оценку $\tilde{f}$ такую, что $\frac{1}{n}\tilde{f} \le f^* \le \tilde{f}$; второй представляет собой расщепляющий алгоритм, а третий вырабатывает АГО.

Будем считать, что $\sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le k_i} a_{ij} \geqslant B$, т.к. в противном случае задача не имеет решения. Первый из подалгоритмов состоит из четырех шагов.

Шаг 1. Упорядочить элементы внутри классов эквивалентности 1,..., n по неубыванию затрат c_{ij} и одновременно выбросить доминируемые элементы (элемент (i,j) из класса i считается доминируемым, если в том же классе найдется элемент (i, k), такой, что $j \ne k$; $c_{ij} \geqslant c_{ik} \wedge a_{ij} \le a_{ik}$). Для удобства изложения сохраним прежнюю нумерацию элементов и будем считать, что k_i – количество оставшихся элементов в i -м классе эквивалентности.

Шаг 2. В каждом классе эквивалентности выбрать элемент $(i, 1)$, имеющий минимальное значение затрат, и найти максимальное значение C среди выбранных элементов: $C = \max_{1\le i\le n} c_{i1}$

Шаг 3. Выбрать в каждом классе эквивалентности элемент с максимальным значением c_{ij} , не превосходящим C (пусть это будет элемент $(i; j(i))$).

Шаг 4. Если $\sum_{i=1}^{n} a_{ij(i)} \geqslant B$, то $\tilde{f} = nC$ и алгоритм кончает работу. В противном случае среди элементов $(i; j(i)+1)$ $(1 \le i \le n)$ найти элемент с наименьшим значением c_{ij} . Пусть это будет $c_{i_* j_*}$ (по построению $c_{i_* j_*} > C$). Присвоить C новое значение, равное $c_{i_* j_*}$, и перейти к шагу 3.

В силу условия $\sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} \geqslant B$ алгоритм после конечного числа обращений к шагу 3 найдет $\tilde{f}$. Нетрудно видеть, что $\tilde{f} \geqslant f^* \geqslant$ $\geqslant C = \tilde{f}/n$. Общее число действий в этом алгоритме не превышает $O(\sum_{i=1}^{n} k_i \log_2 k_i)$ на шаге 1 плюс $O(n)$ на шаге 2 плюс $O(n\sum_{i=1}^{n} k_i)$ на шагах 3-4, т.е. окончательная оценка имеет вид $O(\sum_{i=1}^{n} k_i \log k_i + n\sum_{i=1}^{n} k_i)$.

Перейдем к описанию расщепляющего алгоритма $PA(M)$. В основе этого алгоритма лежит процедура $ДП(\rho)$. Пусть задано некоторое значение параметра $\rho > 0$. Процедура $ДП(\rho)$ будет вырабатывать оптимальное решение задачи f^* в случае, когда $f^* \leq \rho$; если же $f^* > \rho$, процедура не вырабатывает допустимых решений. Процедура $ДП(\rho)$ состоит в формировании множеств $S^0, \ldots, S^n$ таких, что множество $S^0 = \varnothing$, а множества S^i, $i = \overline{1,n}$ содержат все решения x, в которых $x_{\ell j}$ при $\ell > i$ за исключением доминируемых и таких, для которых $f(x) > \rho$. Ограничение $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} a_{ij} x_{ij} \geq B$ может при этом не выполняться.

Для экономии количества действий и памяти мы будем запоминать не сами вектора x, а пары (c, a) такие, что $c = f(x), a = Q(x)$. Пара (c, a) из S^i называется доминируемой, если в множестве S^i найдется пара (c', a'), для которой $c \geq c', a \leq a'$.

При выполнении итерации $i \in \overline{1,n}$ сначала из каждой пары $(c,a) \in S^{(i-1)}$ формируется K_i кандидатов $(c + c_{ij}, a + a_{ij})$, $j = \overline{1, K_i}$, которые помещаются в K_i промежуточных списках, затем список $S^{(i-1)}$ и все полученные списки $S_1^i, S_2^i, \ldots, S_{K_i}^i$, где $S_j^i = \{(c + c_{ij}, a + a_{ij})\}$ попарно сливаются, образуя единственный список S^i. В процессе слияния выбрасываются, во-первых, доминируемые пары, во-вторых, пары (c, a), у которых $c > \rho$ и, в-третьих, пары (c, a), у которых $a \geq B$ за исключением одной из них – с наименьшим значением c.

Если в списке S^n найдется пара (c, a) со значением $a \geq B$, то $f^* \leq \rho$. Если же в S^n нет ни одной пары с $a \geq B$ это означает, что все допустимые решения x рассматриваемой задачи имеют $f(x) > \rho$, откуда $f^* > \rho$.

Трудоемкость предлагаемой процедуры $ДП(\rho): T \sim O(\rho \sum_{i=1}^{n} K_i)$, а память: $M \sim O(\rho n)$.

Рассмотрим теперь "огрубленную" многовариантную задачу выбора, которая получается из исходной задачи, если положить $c'_{ij} = \lceil \frac{c_{ij}}{K} \rceil$, где c'_{ij} – новые коэффициенты целевой функции. Пусть f_1^* – оптимальное значение целевой функции в новой задаче. Очевидно, что:

$$f^* \leq f(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} c_{ij} y_{ij}^* \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} \lceil \frac{c_{ij}}{K} \rceil K y_{ij}^* = K f_1^*, \qquad (2.12)$$

где $y^* = \{y_{ij}^*\}_{i,j}$ – оптимальное решение новой задачи, а также, что

$$K f_1^* \leq K \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K_i} \lceil \frac{c_{ij}}{K} \rceil x_{ij}^* \leq f^* + K, \qquad (2.13)$$

где $x^* = \{x_{ij}^*\}_{i,j}$ – оптимальное решение исходной задачи.

Пусть P – произвольное положительное число.

Применим процедуру ДП(ρ) к "огрубленной" задаче с $c_{ij} = \lceil \frac{c_{ij}}{K} \rceil$; $K = \frac{P}{n+1}$; $\rho = 2(n+1)$.

Если в результате будет найдено некоторое допустимое решение $\tilde{f}_1$, то с учетом (2.12) мы получим:

$f^* \leq K f_1^* \leq K \tilde{f}_1 \leq K\rho = 2P.$

Если же в результате процедуры ДП(ρ) в S^n не будет найдено ни одного допустимого решения, это значит, что $f_1^* > Q$, т.к. из (2.13) следует, что $f^* \geqslant K f_1^* - Km$;
имеем: $f^* \geqslant K\rho - Kn = P \frac{n+2}{n+1} > P$.

Итак, процедура ДП(ρ), примененная к "огрубленной" задаче позволяет определить либо, что $f^* \leq 2P$, либо что $f^* > P$. Таким образом, расщепляющий алгоритм РА(M) состоит в огрублении исходных данных (с $K = M/(n+1)$) и в применении к полученной задаче процедуры ДП($2n+2$).

Трудоемкость алгоритма РА(M): $T \sim O(n \sum_{i=1}^{n} K_i)$, память: $M \sim O(n^2)$.

Приведем, наконец, алгоритм, вырабатывающий АГО и использующий описанные выше подалгоритмы.

Шаг I. Найти с помощью первого подалгоритма величину $\tilde{f}$ такую, что $\frac{1}{n}\tilde{f} \le f^* \le \tilde{f}$.

Шаг 2. Положить: $M = \frac{2\tilde{f}}{n}$; $\rho = 2(n+1)$.

Шаг 3. Используя алгоритм ДП(ρ), установить, что $f^* \le 2M$ либо, что $f^* > M$. В первом случае перейти к шагу 4, во втором случае положить $M = 2M$ и перейти к шагу 3.

Шаг 4. Положить $\hat{f} = 2M$. Конец работы алгоритма.

При каждом новом переходе к шагу 3 величина M возрастает в два раза, и, следовательно, число переходов к шагу 3 не превышает $\log_2 n$, т.к. $M \le \tilde{f}$. Отсюда результирующая трудоемкость Д-процедуры, вырабатывающей АГО: $T \sim O(N \log m + Nn \log n)$, где $N = \sum_{i=1}^{n} k_i$, а $m = \max_{i \in \overline{1,n}} k_i$. Причем трудоемкость выполнения первого шага: $T \sim O(N \log m)$, второго: $T \sim O(1)$, а третьего: $T \sim O(Nn \log n)$.

Прежде чем переходить к описанию других методов построения АГО, отметим, что процедура ДП($\hat{f}$), применяемая к задаче с коэффициентами целевой функции $c'_{ij} = \lfloor \frac{c_{ij}}{K} \rfloor$, где $K = \lceil \frac{\varepsilon \hat{f}}{4n} \rceil$, вырабатывает ε -приближенное решение задачи и есть не что иное, как алгоритм ε -приближенного решения многовариантной задачи выбора на минимум, основанный на методе шкалирования.

II. Метод декомпозиции заключается в разложении исходной задачи на несколько более простых, после чего АГО для исходной задачи строится на основе решения полученных задач. Опишем метод декомпозиции на примере ЗФДЗ ((I.28)-(I.30), (I.33)).

Произведем разложение исходной задачи на две вспомогательные задачи: R_1 и R_2 .

Задача R_1. Максимизировать

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} (c_i' + c_i'') y_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' + a_i'') y_i \le B$$

$$y_i = 0 \vee 1; \; i = \overline{1,n}.$$

Задача R_2. Максимизировать

$$f_2 = \max_{a_i > 0} (c_i' z_i + c_i'')$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' z_i + a_i'' \operatorname{sign} z_i) \le B$$

z_i – целые, $i = \overline{1,n}$.

Задача R_1 – это булевая задача о рюкзаке, для нее с помощью метода релаксации легко найти оценку $\hat{f}_1$, такую, что $\hat{f}_1 \le f_1^* \le 2\hat{f}_1$.

Рассмотрим теперь задачу R_2 и покажем, что $\hat{f}_2 = c_{i_*}' z_{i_*}^0 + c_{i_*}'' = \max\limits_{i : a_i' > 0} (c_i' z_i^0 + c_i'')$ (где $z_i^0 = \lceil \frac{B - a_i''}{a_i'} \rceil$) удовлетворяет условию $\frac{1}{2} \hat{f}_2 \le f_2^* \le \hat{f}_2$.

Выполнение условия $f_2^* \le \hat{f}_2$ очевидно.

Для того чтобы убедиться в выполнении условия $\frac{1}{2} \hat{f}_2 \le f_2^*$, рассмотрим 2 случая:

а) $z_{i_*}^0 = 1$. Тогда $\hat{f}_2 = f_2^*$.

б) $z_{i_*}^0 \ge 2$. Положим: $z' = (0, 0, \ldots, 0, z_{i_*} = 1, 0, 0, \ldots, 0)$; $z'' = (0, 0, \ldots, 0, \overline{z}_{i_*} = z_{i_*}^0 - 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда: $f_2^* \ge f_2(z') \ge c_{i_*}'$; $f_2^* \ge f_2(z'') = c_{i_*}' z_{i_*}^0 - c_{i_*}' + c_{i_*}''$, откуда $2 f_2^* \ge f_2(z') + f_2(z'') \ge \hat{f}_2$. Что и требовалось доказать.

Обозначим величину $\hat{f}_1 + \hat{f}_2$ через $\hat{f}$. Докажем, что величина $\hat{f}$ удовлетворяет условию: $\frac{1}{4} \hat{f} \le f^* \le \hat{f}$, где f^* – оптимальное значение целевой функции в ЗФДЗ.

Так как оптимальные решения задач R_1 и R_2 являются допустимыми решениями ЗФДЗ, то $f_1^* \le f^*$, $f_2^* \le f^*$ и, следовательно: $\frac{1}{2} \hat{f}_1 + \frac{1}{2} \hat{f}_2 \le f_1^* + f_2^* \le 2 f^*$, откуда вытекает первое неравенство.

Пусть $f^* = \sum\limits_{i \in J} (c_i' x_i^* + c_i'')$, где J – множество переменных, принимающих ненулевые значения. Имеем: $f^* = \sum\limits_{i \in J} (c_i' + c_i'') +$

$+ \sum_{i \in J} c_i'(x_i^* - 1)$. Ясно, что вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$, где

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in J, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является допустимым решением задачи R_1 , а вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i^* - 1, & \text{если } i \in J, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является допустимым решением задачи R_2 . Откуда $f^* \le f_1^* + f_2^* \le \hat{f}$.

Ш. Гриди-алгоритмы - это многошаговые процедуры, в которых на каждом шаге принимается решение, являющееся "самым выгодным" в данный момент, без учета того, что может произойти на последующих шагах алгоритма (англ. Greedy - жадный). Очевидно, что гриди-алгоритмы могут приводить к решениям далеким от оптимального, а иногда и к самым худшим решениям. Например, алгоритм "иди в ближайший не пройденный город" может привести в задаче о коммивояжере к самому длинному маршруту. В то же время гриди-процедуры часто позволяют получать вполне приемлемые решения для практических задач, и поэтому широко используются специалистами по прикладной математике. Особенно хорошие результаты можно получать при совместном использовании гриди-процедур и других алгоритмов (как правило алгоритмов, состоящих в частичном переборе вариантов).

Имеется обширная литература, посвященная построению и анализу различных гриди-процедур, поскольку они являются основой большинства эвристических алгоритмов. В последнее время особое внимание при построении гриди-процедур уделяется оценке получаемых с их помощью решений.

Эта работа ведется в двух направлениях. Первое состоит в определении подклассов задач, на которых гриди-процедуры всегда или "почти" всегда вырабатывают оптимальное либо близкое к оптимальному решение. Второе направление состоит в оценивании решений, получаемых с помощью гриди-процедур для "худших", с точки зрения рассматриваемого алгоритма, исходных данных. Основные результаты, полученные в рамках этого второго направления, можно найти в работе автора / 26 /. При построении ε -приближенных алгоритмов используется в основном второе направление.

Известны различные разновидности гриди-алгоритмов, позволяющие строить априорные гарантированные оценки для комбинаторных экстремальных задач. Например, такие алгоритмы существуют для задачи выбора. Один из таких алгоритмов заключается в последовательном включении элементов в план в порядке невозрастания отношений c_i/a_i до тех пор, пока в первый раз не нарушится ресурсное ограничение, т.е. в качестве $\hat{f}$ берем $\sum_{i=1}^{j_0} c_i$, где $j_0 = \min\{j \mid \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \geq B\}$ (считаем, что элементы упорядочены по невозрастанию отношений c_i/a_i).

Нетрудно видеть, что $\hat{f} \geq \varphi^*$ и, следовательно, $\hat{f} \geq f^*$, где φ^* - оптимальное значение целевой функции задачи (I.I)-(I.3), в которой вместо условий $x_i = 0 \vee 1$ рассматриваются условия $0 \leq x_i \leq 1$. Очевидно также, что $\hat{f} = \sum_{i=1}^{j_0} c_i \leq \sum_{i=1}^{j_0-1} c_i + \max_{i \in \overline{1,n}} c_i \leq f^* + f^* = 2f^*$, т.к. без ограничения общности можно считать, что $\max_{i \in \overline{1,n}} a_i \leq B$. Отсюда $\frac{1}{2}\hat{f} \leq f^* \leq \hat{f}$. Эти неравенства легко доказываются для максимизационных задач, т.к. в них погрешность за счет применения гриди-алгоритмов обычно не превосходит величины эффекта от включения последнего элемента в план, и, кроме того, оптимальное значение целевой функции превосходит максимальный из эффектов от включения какого-либо элемента в план.

В минимизационных задачах ситуация значительно хуже. Это в основном связано с тем, что в таких задачах оптимальное значение целевой функции может быть меньше, чем затраты, связанные с включением в план некоторого элемента, в результате чего естественные гриди-процедуры, вырабатывающие АГО для максимизационных задач, не пригодны для задач на минимум (см., например, / 26 /).

Перейдем к описанию разработанных автором гриди-алгоритмов с фиксацией (ГФ-алгоритмы), которые позволяют получать АГО не только для максимизационных, но и для минимизационных задач. Особенностью этих алгоритмов является то, что в них последовательно фиксируются получаемые оценки, после чего последний из включенных в план элементов отбрасывается и задача решается в дальнейшем на меньшем множестве. Приведем простейший из ГФ-алгоритмов, который вырабатывает АГО для задачи выбора на минимум.

Шаг I (сортировка). Перенумеровать все элементы в порядке неубывания отношений c_i/a_i. Положить: $\mathcal{L} = \{1,2,\dots,n\}$; $\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i$.

Шаг 2. (Модифицированная гриди-процедура). Выбираем элементы из списка $\mathcal{L}$ в порядке их нумерации до получения допустимого решения, т.е. определяем $k = \min\{j \mid \sum_{i\in\mathcal{L}: i\le j} a_i \geqslant B\}$. Если такого номера в списке $\mathcal{L}$ нет, алгоритм кончает работу. Положить: $\hat{f} = \min\{\hat{f}; \sum_{i\in\mathcal{L}: i\le k} c_i\}$; $\mathcal{L} = \mathcal{L}\setminus k$. Перейти к шагу 2.

Приведенный алгоритм является частным случаем приводимого ниже ГФ-алгоритма ЗФДЗ, поскольку рассматриваемая задача является частным случаем ЗФДЗ и поэтому его обоснование не приводится, т.к. оно следует из обоснования следующего алгоритма. Однако этот алгоритм интересен тем, что в нем наглядно проявляется основная особенность ГФ-алгоритмов, которая состоит в том, что гриди-процедура на втором шаге применяется каждый раз к задаче на меньшем множестве (после каждого обращения к шагу 2 из списка $\mathcal{L}$ исключается один элемент).

ГФ-алгоритм позволяет получать АГО и для многих других минимизационных задач, в частности для задач с фиксированными доплатами (в т.ч. и в минимизационных постановках). Приведем алгоритм, вырабатывающий АГО для ЗФДЗ на минимум (ЗФДЗ min).

Шаг I (формирование новых предметов). Для всех i от I до n положить

$$(c_i, a_i, \bar{x}_i, s_i, p_i) =$$

$$= \begin{cases} (c_i' + c_i'', a_i' + a_i'', 1, n+i, i) \text{ при } (a_i' \neq 0) \wedge (a_i' c_i'' < a_i'' c_i') \wedge \\ \qquad \wedge (a_i' + a_i'' < B), \\ (c_i' + c_i'', a_i' + a_i'', 1, 0, i) \text{ при } (a_i' \neq 0) \wedge (a_i' c_i'' < a_i'' c_i') \wedge \\ \qquad \wedge (a_i' + a_i'' \geqslant B), \\ (c_i' + c_i'', a_i'', 1, 0, i) \text{ при } a_i' = 0, \\ (c_i' y_i + c_i'', a_i' y_i + a_i'', y_i, 0, i) \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(здесь $y_i = max\{1, \lceil \frac{B - a_i''}{a_i'} \rceil\}$).

Для тех i, для которых $s_i = n+i$, сформировать новые предметы, называемые "хвостами":

$$(c_{n+i}, a_{n+i}, \bar{x}_{n+i}, s_{n+i}, p_{n+i}) = (c_i' y_i, a_i' y_i, y_i, 0, i),$$

где $y = \lceil \dfrac{B - a_i' - a_i''}{a_i'} \rceil$.

Шаг 2 (перенумерация предметов). Перенумеровать все предметы в порядке неубывания отношений c_j / a_j. Пусть N - количество предметов ($n \leq N \leq 2n$).

У всех предметов с ненулевой меткой s_j произвести корректировку метки: новая метка s_j получает значение, равное новому номеру "хвоста", сформированного из того же предмета, что и j-й предмет. Положить $\mathcal{L} = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Шаг 3 (формирование первого допустимого решения). Выбираем элементы из списка $\mathcal{L}$, начиная с первого, в порядке их нумерации до получения допустимого решения, т.е. определяем

$$K = \min \{ j \mid \sum_{i=1}^{j} a_i \geq B \}.$$

Положить: $C = \sum_{i=1}^{K-1} c_i$; $A = \sum_{i=1}^{K-1} a_i$; $\hat{f} = C + c_K$.

Шаг 4 (корректировка последнего выбранного предмета с целью уменьшения оценки $\hat{f}$). Положить

$$r_K = \begin{cases} 0, \text{ если } a'_{p_K} = 0, \\ \min\{\lfloor \frac{A-B+a_K}{a'_{p_K}} \rfloor, \tilde{x}_K - 1\}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Положить: $\hat{f} = \min \{ \hat{f}, C - c'_{p_K} r_K + c_K \}$; $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus K$.
Если $S_K > 0$, положить $x_{S_K} = 0$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus S_K$.

Шаг 5 (формирование последующих допустимых решений). Положить $K = K+1$. Если $K > N$, алгоритм кончает работу. Если $K \notin \mathcal{L}$, перейти к шагу 5. Положить $j = K+1$. Если $A + a_j \geq B$ перейти к шагу 4. Положить $A = A + a_j$, $C = C + c_j$, перейти к шагу 5.

Теорема. Величина $\hat{f}$, вырабатываемая алгоритмом, удовлетворяет условию: $\frac{1}{2}\hat{f} \leq f^* \leq \hat{f}$, где f^* – оптимальное значение целевой функции в исходной задаче.

Доказательство. Очевидно, что $f^* \leq \hat{f}$, поскольку $\hat{f}$ – значение целевой функции на некотором допустимом решении.

Пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ – оптимальное решение ЗФДI. Разобьем каждую ненулевую переменную $\tilde{x}_i$, $i = \overline{1,n}$, которая на первом шаге алгоритма имела $S_i > 0$, на две новых переменных со значениями $\tilde{x}_i - 1$ и I (их вклад в целевую функцию составляет соответственно $c'_i(\tilde{x}_i - 1)$ и $c'_i + c''_i$). Перенумеруем все переменные в соответствии с нумерацией, полученной на втором шаге алгоритма. Обозначим через $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ решение, соответствующее оптимальному. Ясно, что $f^* = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i^*$. Обозначим через $\bar{S}$ множество чисел, оставшихся в списке $\mathcal{L}$ после работы алгоритма, а через $\bar{S}_1$ – множество $\{1,2,\ldots,N\} \setminus \mathcal{L}$. Заметим, что наборы (c_i, a_i, $\bar{x}_i$, s_i, p_i) сформулированы таким образом, что из $i \in \bar{S}$ следует $\bar{x}_i = 1$ (иначе нарушается условие $\sum_{j \in \bar{S}: j \le i} a_j < B$, так как из $\bar{x}_i > 1$ следует $a_i \geqslant B$).

Из определения множества $\bar{S}$ следует, что в оптимальный план входит хотя бы один элемент из множества $\bar{S}_1$. Пусть m – номер первого из таких элементов.

Рассмотрим тот момент в реализации алгоритма, когда элемент с номером m оказывается выброшенным на шаге 4 и попадает в множество $\bar{S}_1$. Предметы, попавшие в этот момент в множество $\bar{S}$ на всех последующих шагах алгоритма остаются в $\bar{S}$, т.е. множество $\{i \,/\, (i \in \bar{S}) \wedge (i < m)\}$ остается неизменным при последующей работе алгоритма.

Обозначим достигнутое к моменту отбрасывания предмета с номером m значение оценки $\hat{f}$ через f_m. Очевидно, что

$$f_m \le \sum_{i \in \bar{S}: i < m} c_i + \bar{c}_m = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 + \bar{c}_m .$$

Здесь $\gamma_1 = \sum_{i \in \bar{S}_2} a_i$, где $\bar{S}_2$ – множество входящих в оптимальное решение предметов с номерами, меньшими m; $\varphi_1 = \sum_{i \in \bar{S}_2} \frac{c_i}{\gamma_1}$; $\gamma_2 = \sum_{i \in \bar{S}_3} a_i$, где $\bar{S}_3$ – множество предметов из $\bar{S}$, не входящих в оптимальное решение и имеющих номера, меньшие m; $\bar{c}_m = c'_{p_m}(\bar{x}_m - r_m) + c''_{p_m}$; $\varphi_2 = \sum_{i \in \bar{S}_3} \frac{c_i}{\gamma_2}$.

По построению величина $\hat{f} \le f_m$. Обозначим: $c_m^* = c'_{pm} x_m^* + c''_{pm}$; $a_m^* = a'_{pm} x_m^* + a''_{pm}$. Оптимум в задаче равен:
$f^* = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_3 \varphi_3 + c_m^*$.
Здесь $\gamma_3 = \sum_{i \in \bar{S}_4} (a'_{pi} x_i^* + a''_{pi})$, где $\bar{S}_4$ – множество предметов, входящих в оптимальный план и имеющих номера, большие m; $\varphi_3 =$

$$= \sum_{i \in \bar{S}_4} (c'_{pi} x_i^* + c''_{pi}) / \gamma_3.$$

Для того чтобы убедиться в справедливости теоремы, рассмотрим в отдельности два возможных случая: $\bar{c}_m \le c_m^*$ и $\bar{c}_m \geq c_m^*$.

Случай I. $\bar{c}_m \le c_m^*$. (Это значит, что $\bar{x}_m - r_m \le x_m^*$).
Тогда если $\bar{c}_m \geq \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2$, то $\hat{f} \le f_m = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 + \bar{c}_m \le 2\bar{c}_m \le 2c_m^* \le 2f^*$.

Если же $c_m < \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2$, то необходимо принять во внимание следующие неравенства:

$$\varphi_2 \le c_m / a_m \le \varphi_3, \tag{2.I4}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 < B; \ \gamma_1 + \gamma_2 + a_m^* \geq B, \tag{2.I5}$$

$$\varphi_2 \le c_m^* / a_m^*. \tag{2.I6}$$

Неравенства (2.I4),(2.I5) очевидны. Чтобы убедиться в выполнении неравенства (2.I6), рассмотрим следующие случаи:

а) $a'_{pm} = 0$. Тогда $\bar{x}_m = 1$ и $c_m^*/a_m^* = \bar{c}_m/\bar{a}_m = c_m/a_m \geq \varphi_2$. В случаях б) и в) считаем $a'_{pm} > 0$.

б) $c''_{pm} a'_{pm} \le c'_{pm} a''_{pm}$. Тогда

$$\frac{\bar{c}_m}{\bar{a}_m} = \frac{c'_{pm}(\bar{x}_m - r_m) + c''_{pm}}{a'_{pm}(\bar{x}_m - r_m) + a''_{pm}} \le \frac{c'_{pm}}{a'_{pm}}.$$

Следовательно,

$$\frac{c_m^*}{a_m^*} = \frac{\bar{c}_m + (x_m^* - \bar{x}_m)c'_{p_m}}{\bar{a}_m + (x_m^* - \bar{x}_m)a'_{p_m}} \geqslant \frac{\bar{c}_m}{\bar{a}_m}.$$

Из правила образования новых предметов на первом шаге алгоритма следует, что возможны две ситуации: либо $\bar{x}_m = 1$, либо элемент с номером m является "хвостом" и при этом $\bar{x}_m > 1$. В обеих ситуациях $\bar{c}_m/\bar{a}_m = c_m/a_m$. Так как $c_m/a_m \geqslant \varphi_2$, то $c_m^*/a_m^* \geqslant c_m/a_m \geqslant \varphi_2$.

в) $c''_{p_m} a'_{p_m} > c'_{p_m} a''_{p_m}$. (2.17)

Тогда по правилу построения новых элементов на первом шаге алгоритма для элемента с номером m выполняется неравенство $a'_{p_m}\bar{x}_m + a''_{p_m} \geqslant B$, следовательно, $c'_{p_m}\bar{x}_m + c''_{p_m} \geqslant f^* \geqslant$ $\geqslant c_m^* \geqslant c'_{p_m}x_m^* + c''_{p_m}$, откуда $\bar{x}_m \geqslant x_m^*$.

Из условия (2.17) следует

$$\frac{c_m^*}{a_m^*} = \frac{c'_{p_m}x_m^* + c''_{p_m}}{a'_{p_m}x_m^* + a''_{p_m}} > \frac{c'_{p_m}}{a'_{p_m}},$$

откуда

$$\varphi_2 \leqslant \frac{c_m}{a_m} = \frac{c'_{p_m}\bar{x}_m + c''_{p_m}}{a'_{p_m}\bar{x}_m + a''_{p_m}} = \frac{c_m^* + (\bar{x}_m - x_m^*)c'_{p_m}}{a_m^* + (\bar{x}_m - x_m^*)a'_{p_m}} < \frac{c_m^*}{a_m^*} \quad (2.18)$$

Из условий (2.14)-(2.18) получаем: $\gamma_2\varphi_2 < (\gamma_3 + a_m^*)\varphi_2 \leqslant \gamma_3\varphi_3 + c_m^*$, откуда

$$\hat{f} < f_m \leqslant \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \bar{c}_m < 2(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) < 2(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_3\varphi_3 + c_m^*) = 2f^* \leqslant 2\hat{f}.$$

Случай 2. $\bar{c}_m > c_m^*$. Запишем f_m в следующем виде:

$f_m = \gamma_1\varphi_1 + \gamma'_2\varphi'_2 + c_m^*$, где

$$\gamma'_2 = \gamma_2 + \bar{a}_m - a_m^*, \quad \varphi'_2 = \Big(\sum_{i \in \bar{S}_3} c_i + \bar{c}_m - c_m^*\Big)\Big/\gamma'_2.$$

В силу условия $c_m > c_m^*$ имеем $\bar{x}_m \geqslant 2$, откуда (с использованием правила образования новых элементов на первом шаге алгоритма) следует

$$\varphi_3 \geqslant c_m / a_m \geqslant c'_{p_m} / a'_{p_m},$$

откуда, пользуясь определением величин φ_2, φ_3, φ_2' и очевидным неравенством (2.14), получаем $\varphi_2' \leqslant \varphi_3$.

Также имеем $\gamma_2' < B - \gamma_1 - a_m^* + a'_{p_m}$ и $\gamma_3 \geqslant B - \gamma_1 - a_m^*$, откуда $\gamma_2' < \gamma_3 + a'_{p_m}$, и далее:

$$f_m = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2' \varphi_2' + c_m^* < \gamma_1 \varphi_1 +$$

$$+ \gamma_3 \varphi_3 + c'_{p_m} + c_m^* = f^* + c'_{p_m} \leqslant 2f^*.$$

На этом доказательство теоремы закончено. Несложно также показать, что трудоемкость приведенного алгоритма $T \sim O(n \log n)$.

IV. Суть метода релаксации состоит в отбрасывании условий целочисленности переменных и использовании оптимального значения целевой функции полученной задачи (которая решается, как правило, значительно легче) в качестве АГО для исходной задачи. Метод релаксации дает возможность получить АГО для многомерной задачи о выборе / 77 /, задачи о размещении / 86 /, задачи (1.4)-(1.7) / 99 /.

В настоящей работе метод релаксации применяется для получения АГО для задач с фиксированными доплатами. Кроме того, разработана модификация метода релаксации, позволяющая получать АГО для минимизационных задач.

Перейдем к рассмотрению конкретных алгоритмов построения АГО для ЗФД. Для этого рассмотрим вспомогательные задачи P1 и P2.

Задача PI:

$$f_{P1} = \sum_{i=1}^{n} (c_i' x_i + c_i'' y_i) \rightarrow max \qquad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' x_i + a_i'' y_i) \leq B \qquad (2.20)$$

$$0 \leq y_i \leq x_i \leq 1 ; \ sign\, x_i \leq y_i ; \ i = \overline{1,n}. \qquad (2.21)$$

Задача P2 отличается только последним условием, которое для нее имеет следующий вид:

$$0 \leq x_i ; \ 0 \leq y_i \leq 1 ; \ sign\, x_i \leq y_i ; i = \overline{1,n} \qquad (2.22)$$

Без ограничения общности можно считать, что для обеих задач $\max\limits_{i \in \overline{1,n}} (a_i' + a_i'') \leq B$ и что c_i' и a_i' равны либо не равны нулю одновременно. Нетрудно убедиться, что в задачах PI и P2 существуют оптимальные решения, в которых все переменные, кроме может быть одной, целые. Отсюда следует, что $\frac{1}{2} f_{P1}^* \leq f_1^* \leq f_{P1}^*$, где f_1^* - оптимальное значение целевой функции, соответствующей ЗФДI, а $\frac{1}{2} f_{P2}^* \leq f_3^* \leq f_2^* \leq f_{P2}^*$, где $f_2^* (f_3^*)$ - оптимальное значение целевой функции, соответствующей ЗФД2(ЗФД3).

Замечание. При рассмотрении ЗФД3 во вспомогательной задаче P2 считаем $c_i'' = c_i' + c_i''$, $i = \overline{1,n}$.

Таким образом, для получения АГО в ЗФДI (ЗФД2, ЗФД3) достаточно точно решить задачу PI (задачу P2). В основе точного решения этих задач лежат гриди-алгоритмы с фиксацией, приведенные выше. Приведем алгоритм точного решения задачи PI.

Шаг I. Из каждого элемента, у которого $a_i' c_i'' > a_i'' c_i'$ формируем два набора $(c_i', a_i', 0)$ и $(c_i'', a_i'', 0)$. Из каждого элемента, у которого $c_i' = a_i' = 0$, формируем набор $(c_i'', a_i'', 0)$. Из остальных элементов формируем наборы вида $(c_i'' + c_i', a_i'' + a_i', i)$.

В результате этого шага получаем m -наборов $(n \le m \le 2n)$ вида (c_i, a_i, p_i).

Шаг 2. Упорядочиваем наборы по невозрастанию отношений c_i / a_i и выбираем эти наборы в порядке нумерации до выполнения ограничения по ресурсам. Опишем этот шаг подробнее.

2.1. Положим: $i = 1$; $M = \varphi = 0$.

2.2. Если $M + a_i \le B$, то берем: $M = M + a_i$; $\varphi = \varphi + c_i$ и переходим к шагу 2.3.

Если $p_i = 0$, то $\varphi = \varphi + c_i \frac{B-M}{a_i}$ и алгоритм кончает работу. Переходим к шагу 3.

2.3. Берем $i = i+1$. Если $i \le m$, переходим к 2.2., иначе алгоритм кончает работу.

Шаг 3. Берем $(c_i, a_i, p_i) = \left(c''_{p_i} + c'_{p_i} \cdot \max\left\{0, \frac{B-M-a''_{p_i}}{a'_{p_i}}\right\}, a''_{p_i} + \max\left\{0, B - a''_{p_i}\right\}, p_i \right)$. Если $i = m$ или $c_i a_{i+1} \ge a_i c_{i+1}$ берем

$$\varphi = \begin{cases} \varphi + c_i \frac{B-M}{a_i}, & \text{при } M + a_i > B, \\ \varphi + c_i & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и алгоритм кончает работу. Иначе набор (c_i, a_i, p_i) получает новый (больший номер) и алгоритм начинает работу со следующим набором. Чтобы не вдаваться в технические тонкости считаем, что он имеет теперь номер i. Переход к 2.2.

Нетрудно видеть, что полученное в результате работы алгоритма φ и есть $f^*_{p_1}$. В процессе работы алгоритма решение (x, y) не отслеживается, но это можно сделать путем незначительного усложнения алгоритма. Оценка трудоемкости приведенного алгоритма $T \sim O(n^2)$ следует из того очевидного факта, что при переупорядочениях на шаге 3 предметы с $p_i > 0$ могут меняться местами не более одного раза.

Задача Р2 с помощью замены переменных может быть сведена к задаче РI и для ее решения можно использовать приведенный алгоритм. Однако непосредственно для задачи Р2 удается построить алгоритм с лучшей оценкой трудоемкости. Приведем этот алгоритм.

Шаг I. Пусть $L = \{ i / a'_i > 0, i \in \overline{1,n} \}$. Переупорядочиваем элементы с номерами из L по невозрастанию отношений c'_i / a'_i. Получаем $L = \{ j_1, j_2, \ldots, j_k \}$. В случае, если все a'_i равны нулю, $k = 0$ и задача превращается в обычную задачу выбора. Берем: $i = l = 1$; $T = M = \varphi = 0$.

Шаг 2. Если $l > k$, положить $a'_{j_l} = c'_{j_l} = 0$.

Если $(c''_i a'_{j_l} \geq c'_{j_l} a''_i) \wedge (M + a''_i \geq B)$, то берем $\varphi = \max\left\{ \varphi, T + c''_i \frac{B-M}{a''_i} \right\}$ и алгоритм кончает работу.

Если $c''_i a'_{j_l} \geq c'_{j_l} a''_i$, то берем: $T = T + c''_i$; $M = M + a''_i$ и переходим к шагу 3.

Если $j_l \geq i$, то берем:

$$\varphi = \begin{cases} \max\left\{ \varphi, T + c''_{j_l} \frac{B-M}{a''_{j_l}} \right\}, & \text{если } M + a''_{j_l} \geq B, \\ \max\left\{ \varphi, T + c''_{j_l} + c'_{j_l} \frac{B-M-a''_{j_l}}{a'_{j_l}} \right\} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$l = l + 1$ и переходим к шагу 2.

Берем $\varphi = \max\left\{ \varphi, T + c'_{j_l} \frac{B-M}{a'_{j_l}} \right\}$ и алгоритм кончает работу.

Шаг 3. Берем $i = i + 1$. Если $i \leq n$, переходим к шагу 2. Если $l \leq k$, то берем $\varphi = \max\left\{ \varphi, T + c'_{j_l} \frac{B-M}{a'_{j_l}} \right\}$.

Конец работы алгоритма.

Полученное в результате работы алгоритма значение φ и есть f^*_{P2}. Оценка трудоемкости алгоритма $T \sim O(n \log n)$, причем трудоемкость основных (второго и третьего) шагов алгоритма — $O(n)$.

Существенным отличием алгоритмов получения АГО для минимизационных задач является то, что в них непрерывную задачу приходится решать не один раз, а несколько, причем каждый раз на множестве с меньшим числом элементов. Рассмотрим, например, минимизационную многомерную задачу выбора (ММЗВ).

Приведем формальную постановку ММЗВ.

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \min \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \geq B_j \;;\; j = \overline{1,m} \tag{2.24}$$

$$c_{ij},\, a_i \geq 0 \;;\; x_i = 0 \vee 1 \;;\; i = \overline{1,n} \;;\; j = \overline{1,m} \tag{2.25}$$

В ММЗВ требуется минимизировать затраты на строительство объекта при условии выполнения ограничений на выпускаемые товары. Экономический смысл коэффициентов очевиден. Считаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij} \geq B_j \;;\; j = \overline{1,m}$, иначе задача не имеет решения. Алгоритм построения АГО для ММЗВ состоит из трех шагов.

Шаг I. Берем: $\mathcal{L} = \{1, 2, \ldots, n\} \;;\; \hat{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Шаг 2. Решаем непрерывную задачу:

$$\varphi = \sum_{i \in \mathcal{L}} a_i x_i \to \min \Big/ \sum_{i \in \mathcal{L}} c_{ij} x_i \geq B_j \;;\; j = \overline{1,m} \;;\; 0 \leq x_i \leq 1 \;;\; i \in \mathcal{L} \tag{2.26}$$

Если задача (2.26) не имеет допустимого решения, алгоритм кончает работу.

Шаг 3. Пусть $x^{\circ} = \{x_i^{\circ}\}_{i \in \mathcal{L}}$ - оптимальное решение задачи (2.26). Обозначим $\tilde{x}_i = \lceil x_i^{\circ} \rceil - x_i^{\circ}$ и берем

$$\hat{f} = \min \Big\{ \hat{f},\, \varphi^* + \sum_{i \in \mathcal{L}} a_i \tilde{x}_i \Big\}.$$

Пусть $i_0 : a_{i_0} \tilde{x}_{i_0} = \max\limits_{i \in \mathcal{L}} a_i \tilde{x}_i$. Берем $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus i_0$ и переходим к шагу 2.

Покажем, что полученная в результате работы алгоритма величина $\hat{f}$ удовлетворяет условию $\hat{f}/(m+1) \le f^* \le \hat{f}$. Действительно, пусть $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^n$ - оптимальное решение ММЗВ, а i_0 - первый (в порядке исключения из $\mathcal{L}$) среди элементов с номером из $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \mathcal{L}$, входящий в оптимальное решение задачи (2.23)-(2.25), т.е. $x_{i_0}^* = 1$. Рассмотрим ту итерацию, когда i_0 исключается из списка $\mathcal{L}$. Возможны два варианта.

а) $\varphi^* \geqslant a_{i_0}\tilde{x}_{i_0}$. Тогда $(m+1)\varphi^* \geqslant \sum\limits_{i\in\mathcal{L}} a_i \tilde{x}_i + \varphi^* \geqslant \hat{f} \geqslant f^* \geqslant \varphi^* \geqslant \hat{f}/(m+1)$.

б) $\varphi^* < a_{i_0}\tilde{x}_{i_0}$. Тогда $(m+1)a_{i_0} > \sum\limits_{i\in\mathcal{L}} a_i\tilde{x}_i + \varphi^* \geqslant \hat{f} \geqslant f^* \geqslant a_{i_0} > \hat{f}/(m+1)$.

Таким образом, для получения АГО для ММЗВ достаточно не более $(n-1)$-раза решить задачу (2.26), что можно сделать с полиномиальной трудоемкостью / 82 /. Благодаря наличию АГО для ММЗВ с помощью алгоритма из / 77 / для нее удается построить и полиномиальный ε -приближенный алгоритм. Отметим, что приведенный алгоритм вырабатывает АГО и для небулевой многомерной задачи выбора.

Модификации алгоритмов для задач PI и P2 (суть которых ясна из алгоритма для ММЗВ) позволяют получать АГО для минимизационных задач с фиксированными доплатами. Эти алгоритмы, оценки которых те же, что и у соответствующих максимизационных задач, здесь не приводятся вследствие своей громоздкости.

На этом мы заканчиваем описание методов получения априорных гарантированных оценок оптимального значения целевой функции для дискретных оптимизационных задач.

В заключение главы приведем вытекающую из ее результатов классификацию дискретных оптимизационных задач с точки зрения сложности их приближенного решения.

I. Задачи, для которых вообще не существует (если $P \neq NP$) эффективных приближенных алгоритмов. Примеры таких задач можно найти в / 44, I02 /.

2. Задачи, в которых эффективно строятся приближенные решения с априорной оценкой точности, т.е. алгоритмы, вырабатывающие АГО. При этом ошибка Δ (выраженная, например, в процентах от искомого оптимума) может быть заранее, до реализации алгоритма, оценена сверху: $\Delta \leq c$ или $\Delta \leq c \log n$ (но не может быть сделана сколь угодно малой). К этому классу относится задача о размещении строительных объектов, рассмотренная в первом параграфе этой главы, многие задачи теории расписаний (см., например,/ 89 /) и ряд других.

3. Задачи, в которых эффективно строятся "почти оптимальные" решения с любой наперед заданной точностью (ε -приближенные алгоритмы). (См. второй и третий параграфы этой главы, а также следующую главу.)

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

§ I. Построение эффективных приближенных алгоритмов для задач с фиксированными доплатами

В этом параграфе строятся ε -приближенные алгоритмы для задач с фиксированными доплатами, рассмотренных в первой главе.. Как уже отмечалось выше, с помощью таких задач удается учитывать возможность поэтапного ввода объектов и перераспределения капитальных вложений на строительство и модернизацию, определения рационального соотношения между капитальными вложениями, направляемыми на создание заделов и на завершение строительства, и многие другие факторы. Формальные постановки задач с фиксированными доплатами приведены в третьем параграфе первой главы. В настоящем параграфе ε -приближенные алгоритмы строятся для ЗФДI, ЗФД2 и ЗФД3 (см. (I.28)-(I.33)). Для остальных задач ЗФД алгоритмы строятся аналогично.

Первый быстрый ε -приближенный алгоритм для ЗФД был построен в работе / I3 /. Оценки этого алгоритма: $T \sim O(n^4/\varepsilon + n(\sum_{i=1}^{n} \log(1 + a_i'/a_i))^3/\varepsilon^4), M \sim O(n^3/\varepsilon)$.

Хотя этот алгоритм и является "быстрым", трудоемкость его довольно велика и многие практические задачи не удается решать с помощью этого алгоритма с достаточной точностью. В связи с этим важное практическое и теоретическое значение приобретает построение алгоритмов с лучшими оценками. В настоящем параграфе разработаны методы построения быстрых ε -приближенных алгоритмов для ЗФДI, ЗФД2 и ЗФД3, причем оценки этих алгоритмов следующие: для ЗФДI- $O\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}\right) / O\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$ (в числителе - оценка трудоемкости алгоритма, в знаменателе - памяти); для ЗФД2 - $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)/O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$; для ЗФД3 - $O\left(\frac{n}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{n^2}{\varepsilon}\right)/O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$

Построение ε -приближенных алгоритмов для ЗФД осуществляется в два этапа. На первом этапе строится гарантированная оценка оптимального значения целевой функции, а на втором этапе, с использованием полученной оценки, строится ε -приближенный алгоритм. Методы построения гарантированных оценок описаны в третьем параграфе второй главы.

В ЗФДI может не существовать допустимого решения u такого, что $f_1(u) = f_1^*$ (где f_1^* - оптимальное значение целевой функции ЗФДI), вследствие незамкнутости множества допустимых решений. Вместо исходной, рассмотрим вспомогательную задачу AI:

$$f_{A1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (c_i' x_i + c_i'' y_i) \to max \tag{3.I}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' x_i + a_i'' y_i) \le B \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'' y_i < B \vee \sum_{i=1}^{n} a_i' y_i = 0 \tag{3.3}$$

$$0 \le x_i \le y_i \le 1; \; y_i = 0 \vee 1; \; i = \overline{1,n} \tag{3.4}$$

Задача рассматривается в максимизационной постановке, поскольку при решении задачи на минимум не видны некоторые принципиальные сложности построения алгоритмов, связанные с необходимостью учитывать ограничение (3.3), вытекающее из незамкнутости области допустимых решений в ЗФДI на максимум.

При решении задачи на минимум схема построения ε -приближенного алгоритма несколько упрощается.

<u>Лемма I</u>. По любому допустимому решению (x , y) задачи AI можно построить допустимое решение u задачи I со значением целевой функции, сколь угодно мало отличающимся от $f_{A1}(x,y)$.

<u>Лемма 2</u>. Оптимальные значения целевых функций в обеих задачах совпадают: $f_1^* = f_{A1}^*$.

<u>Лемма 3</u>. Существует оптимальное решение задачи AI, в котором

не более чем одна переменная x_i отлична от 0 и I.

Доказательство лемм.

I. Опишем правило, с помощью которого по любому допустимому решению ($\tilde{x}$, $\tilde{y}$) задачи AI можно восстановить допустимое решение $\tilde{u}$ ЗФДI такое, что $f_{AI}(\tilde{x},\tilde{y}) - f_1(\tilde{u}) \leq \eta$, где $\eta > 0$ – любое заданное число.

Если $\tilde{x}_i \tilde{y}_i > 0$ или $\tilde{y}_i = 0$, берем $\tilde{u}_i = \tilde{x}_i$.

Подсчитываем количество таких номеров предметов, для которых $\tilde{x}_i = 0$, $\tilde{y}_i = 1$, $a_i' \neq 0$. Пусть таких предметов K –штук ($K \leq n$).

Если $\tilde{x}_i = 0$, $\tilde{y}_i = 1$ и $a_i' = 0$, берем $\tilde{u}_i = 1$.

Если $K = 0$, решение $\tilde{u}$ восстановлено.

Если $\sum_{i=1}^{n} a_i' \tilde{x}_i = 0$, берем $\Delta = B - \sum_{i=1}^{n} a_i'' \tilde{y}_i$ (по условию (3.3) $\Delta > 0$). Иначе пусть $x_j a_j' > 0$. Тогда берем

$$\Delta = \begin{cases} \min\left\{ \frac{a_j'}{2}, \frac{\eta \cdot a_j'}{c_j'} \right\}, & \text{если } c_j' \neq 0; \\ a_j'/2 , & \text{если } c_j' = 0. \end{cases}$$

Корректируем значение $\tilde{u}_j$.

Берем новое
$$\tilde{u}_j = \begin{cases} \tilde{u}_j/2 , & \text{если } \Delta = a_j'/2, \\ \tilde{u}_j - \eta/c_j' , & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для всех i : $\tilde{x}_i = 0$, $\tilde{y}_i = 1$ и $a_i' > 0$ берем $\tilde{u}_j = \frac{\Delta}{K a_i'}$.

Для полученного таким образом решения задачи AI имеем:

а) при $K > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i' \tilde{x}_i > 0$: ($J_1 = \{ i \mid \tilde{x}_i = a_i' = 0 \wedge \tilde{y}_i = 1 \}$, $J_2 = \{ i / \tilde{x}_i = 0 \wedge \tilde{y}_i = 1 \wedge a_i' > 0 \}$)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' \tilde{u}_i + a_i'' \operatorname{sign} \tilde{u}_i) = \sum_{i: x_i > 0} (a_i' \tilde{x}_i + a_i'') + \sum_{i \in J_1} a_i'' +$$

$$+ \sum_{i \in J_2} \left(\frac{\Delta}{K} + a_i'' \right) + a_j'' + \tilde{x}_i a_i' - \Delta = \sum_{i=1}^{n} (a_i' \tilde{x}_i + a_i'' \tilde{y}_i)$$

б) при $K > 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i' \tilde{x}_i = 0$: $\sum_{i=1}^{n} (a_i' \tilde{u}_i + a_i'' \operatorname{sign} \tilde{u}_i) = B$;

в) при $K=0$:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i'\tilde{u}_i + a_i''\operatorname{sign}\tilde{u}_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i'\tilde{x}_i + a_i''\tilde{y}_i)$$

т.е. полученное решение является допустимым.

Далее, для случая а):

$$f_{A1}(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{u}) \leq \begin{cases} 0, \text{ при } c_j' = 0, \\ \min\{\eta, \frac{c_j'\tilde{x}_j}{2}\} - \sum\limits_{i:\tilde{x}_i=\tilde{y}_i=0}\frac{\Delta c_i'}{Ka_i'} \leq \eta, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма I доказана.

2. Лемма 2 следует из леммы I и из того очевидного факта, что по любому допустимому решению $\tilde{u}$ задачи AI можно получить допустимое решение $(\tilde{x},\tilde{y})$ задачи A с тем же значением целевого функционала (правило: $\tilde{x}_i=\tilde{u}_i$; $\tilde{y}_i=\operatorname{sign}\tilde{u}_i$; $i=\overline{1,n}$).

3. Пусть $(\ell\neq m)\wedge(0<\tilde{x}_\ell,\tilde{x}_m<1)$. Опишем правило, благодаря которому удается сделать одну из этих переменных равной 0 либо I и при этом сохранить либо увеличить значение целевой функции.

Если $a_\ell'(a_m')=0$, берем $\tilde{x}_\ell(\tilde{x}_m)=1$ и получаем допустимое решение задачи A1 с нехудшим значением f_{A1} . Аналогично, если $c_\ell'(c_m')=0$, берем $\tilde{x}_\ell(\tilde{x}_m)=0$.

Пусть $a_\ell' a_m' c_\ell' c_m' > 0$ и $c_\ell' a_m' \geq c_m' a_\ell'$.

Берем $\tilde{x}_\ell' = \min\{1, \tilde{x}_\ell + a_m'\tilde{x}_m/a_\ell'\}$ и $\tilde{x}_m' = \max\{0, \tilde{x}_m - a_\ell'(1-\tilde{x}_\ell)/a_m'\}$.

Таким образом, либо $\tilde{x}_\ell'$ будет равно I, либо $\tilde{x}_m'$ будет равно 0 и при этом значение целевого функционала не уменьшится (действительно, $f_{A1}(\tilde{x}',\tilde{y}') - f_{A1}(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}_\ell'-\tilde{x}_\ell)c_\ell' - (\tilde{x}_m-\tilde{x}_m')c_m' =$

$$= \begin{cases}(1-\tilde{x}_\ell)c_\ell' - a_\ell'(1-\tilde{x}_\ell)c_m'/a_m' = a_\ell'(1-\tilde{x}_\ell)\left(\frac{c_\ell'}{a_\ell'} - \frac{c_m'}{a_m'}\right) \geq 0, \text{ при } \tilde{x}_m'=1; \\ \frac{a_m'\tilde{x}_m c_\ell'}{a_\ell'} - \tilde{x}_m c_m' = a_m'\tilde{x}_m\left(\frac{c_\ell'}{a_\ell'} - \frac{c_m'}{a_m'}\right) \geq 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пользуясь этим правилом и далее, можно добиться, чтобы не более одной переменной отличалось от 0 либо от I.

На этом доказательство леммы 3 заканчивается.

Из приведенных лемм следует, что, во-первых, для получения ε -оптимального решения ЗФДI достаточно получить ε' -оптимальное решение задачи AI с произвольным $0<\varepsilon'<\varepsilon$ и, во-вторых, для получения ε'-оптимального решения задачи AI достаточно решить n задач рюкзачного типа с узкоблочными ограничениями, имеющих следующий вид:

$$f_\ell = \sum_{i=1, i\neq \ell}^{n} \left(c_i'' y_i' + (c_i' + c_i'') y_i''\right) + c_\ell'' + c_\ell' x_\ell \to max \qquad (3.5)$$

$$\sum_{i=1, i\neq \ell}^{n} \left(a_i'' y_i' + (a_i' + a_i'') y_i''\right) + a_\ell'' + a_\ell' x_\ell \le B \qquad (3.6)$$

$$\sum_{i=1, i\neq \ell}^{n} a_i'' y_i' + a_\ell'' < B \vee \sum_{i=1, i\neq \ell}^{n} a_i' y_i' + a_\ell' = 0 \qquad (3.7)$$

$$y_i', y_i'' = 0 \vee 1;\ y_i' + y_i'' \le 1;\ i = \overline{1,n} \setminus \ell;\ 0 \le x_\ell \le 1 \qquad (3.8)$$

Алгоритм решения задачи (3.5)-(3.8) состоит из $(n+1)$ шага. На нулевом (предварительном) шаге полагаем:

$$A_1^{0,1} = A_1^{0,2} = B_1^{0,1} = B_1^{0,2} = 0;\ S^1(0) = S^2(0) = 1.$$

На K -м шаге ($K=\overline{1,(n-1)}$) производятся следующие итерации:

I. Производится K -сдвиг, в результате чего из двух последовательностей наборов $\mathcal{L}_1^0 = \{A_j^{K-1,1}, B_j^{K-1,1}\}_{j=1}^{S^1(K-1)}$ и $\mathcal{L}_2^0 = \{A_j^{K-1,2}, B_j^{K-1,2}\}_{j=1}^{S^2(K-1)}$ в случае, если $a_K' \neq 0$ образуется еще четыре последовательности наборов: $\mathcal{L}_r^1 = \{A_j^{K-1,r} + c_\nu'', B_j^{K-1,r} + a_\nu''\}_{j=1}^{S^r(K-1)}$; $\mathcal{L}_r^2 = \{A_j^{K-1,r} + c_\nu' + c_\nu'', B_j^{K-1,r} + a_\nu' + a_\nu''\}_{j=1}^{S^r(K-1)}$ $\left(r = 1,2;\ \nu = \begin{cases} K, & \text{при } K<\ell, \\ K+1, & \text{при } K \geq \ell. \end{cases}\right)$.

в случае, если $a_\nu' = 0$, последовательности $\mathcal{L}_1'$ и $\mathcal{L}_2'$ не образуются.

2. Отбрасываются недопустимые наборы, т.е. те наборы в $\mathcal{L}_1^1$ (если $a_y^1 \neq 0$), для которых не выполняется ограничение (3.7), а также те наборы остальных последовательностей, для которых не выполняется ограничение (3.6).

3. Сливаются последовательности, в результате чего образуются две новые последовательности: Q_1 - за счет слияния $\mathcal{L}_1^0$, $\mathcal{L}_1^1$; Q_2 - за счет слияния остальных последовательностей. При слиянии сохраняется упорядочение наборов внутри последовательностей по неубыванию первой компоненты.

4. В полученных последовательностях выбрасываются δ - близкие наборы $\delta = \frac{\hat{f}\varepsilon'}{4n}$, где $\hat{f}$ - гарантированная оценка для ЗФДI, а, следовательно, и для задачи AI. Выбрасывание δ - близких наборов состоит в том, что среди всех наборов, у которых первая компонента заключена между $j\delta$ и $(j+1)\delta$ (для всех j таких, что в $[j\delta, (j+1)\delta[$ попадает первая компонента хотя бы одного набора), выбирается один с наименьшим значением второй компоненты. Последовательность оставшихся в Q_1 (Q_2) наборов обозначается через $\mathcal{L}_1^0$ ($\mathcal{L}_2^0$). Через $S^1(\kappa)$ ($S^2(\kappa)$) обозначаем количество элементов в $\mathcal{L}_1^0$ ($\mathcal{L}_2^0$).

На последнем n-м шаге подсчитывается величина:

$$\varphi_\ell = \max_{r=1,2} \max_{1 \le j \le S^r(n-1)} \left(A_j^{n-1,r} + d_j^r\right),$$

где

$$d_j^r = \begin{cases} 0, \text{ при } B_j^{n-1,r} + a_\ell'' \geq B \quad \text{или } B_j^{n-1,r} + a_\ell'' > B, \\ c_\ell'' + c_\ell'(B - B_j^{n-1,r} - a_\ell'')/a_\ell', \text{ если } B_j^{n-1,r} + a_\ell'' + a_\ell' \geq B \\ \text{и не выполняются условия предыдущей строки,} \\ c_\ell' + c_\ell'' \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что предлагаемый алгоритм вырабатывает ε' - оптимальное решение рассматриваемой задачи и что трудоемкость этого алгоритма - $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$, а память $O\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$.

Для получения решения задачи А1 находим $\varphi_{\ell^*} = \max_{\ell \in \overline{1,n}} \varphi_\ell$ и восстанавливаем решение (набор $\{\tilde{y}'_i, \tilde{y}''_i\}_{i=1, i\neq \ell^*}^{n}$ и $\tilde{x}_{\ell^*}$) с помощью следующей дихотомической процедуры:

1. Рассмотрим ту задачу, в которой $\ell = \ell^*$ (задача A_{ℓ^*}), и определим, при каком значении j образуется φ_{ℓ^*}.

Если $d_j^r = 0$, то $x'_{\ell^*} = 0$. Если $0 < d_j^r < c'_\ell + c''_\ell$, то $\tilde{x}_{\ell^*} = \frac{B - B_j^{n-1,r} - a''_{\ell^*}}{a'_{\ell^*}}$, где $B_j^{n-1,r}$ – компонента такого набора, от которого образуется φ_{ℓ^*}. Если $d_j^r = c'_{\ell^*} + c''_{\ell^*}$, то $\tilde{x}_{\ell^*} = 1$.

2. Выполняем первые $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ шагов алгоритма решения задачи A_{ℓ^*} и в результате получаем последовательности наборов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Затем выполняем остальные шаги (кроме n -го), но отправляясь не от последовательностей наборов, полученных в результате выполнения $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -шага, а от последовательностей, полученных на нулевом шаге. В результате выполнения этих шагов будут получены последовательности наборов $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$. Выбираем среди всевозможных пар наборов, первый из которых принадлежит $\mathcal{L}_1$ либо $\mathcal{L}_2$, а второй – $\mathcal{L}_3$, либо $\mathcal{L}_4$, такую пару, в которой сумма первых компонент равна $A_j^{n-1,r}$, а вторая минимальна. Продолжая делить множества предметов на две части и применяя и дальше описанный алгоритм, восстанавливаем (дойдя до множеств, состоящих из двух предметов) набор $\{\tilde{y}'_i, \tilde{y}''_i\}_{i=1, i\neq \ell^*}^{n}$. Несложно убедиться, что верна следующая лемма:

<u>Лемма 4</u>. Трудоемкость выполнения процедуры восстановления решения – $O(n^2 \log \frac{n}{\varepsilon})$, память – $O(\frac{n}{\varepsilon})$.

Общая трудоемкость ε' -приближенного алгоритма для задачи А1 – $O(n^3/\varepsilon)$. Трудоемкость алгоритма может быть уменьшена, если заметить, что при решении задач при разных ℓ используется частично одна и та же информация. Действительно, при решении задач с $\ell \geq n-m$, $0 < m < n$, первые $(n-m-1)$ шагов во всех задачах одинаковы. Если использовать последовательности, полученные на $(n-m-1)$-м шаге, трудоемкость решения всех задач с $\ell=\overline{(n-m),n}$ будет $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}+\frac{nm^2}{\varepsilon}\right)$. Помещая последовательно различные группы по m предметов на последние m -мест, все задачи с $\ell=\overline{1,n}$ удается решить за $O\left(\frac{n}{m}\left(\frac{n^2}{\varepsilon}+\frac{nm^2}{\varepsilon}\right)\right)$ действий (приходится решать порядка $\frac{n}{m}$ групп по m задач). Величина, стоящая в скобках, достигает минимального значения при $m=n^{\frac{1}{2}}$. Из вышеизложенного следует, что верна теорема:

Теорема I. Алгоритм, состоящий из вычисления гарантированной оценки $\overline{\varphi}$ решения задачи (3.5)-(3.8) при $\ell=\overline{1,n}$, и дихотомической процедуре восстановления решения, вырабатывает ε -оптимальное решение задачи I и характеризуется следующими оценками: трудоемкость $O\left(\frac{n^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon}\right)$, память - $O\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$.

Перейдем теперь к построению быстрого ε -приближенного алгоритма для ЗФД2. Эта задача легко может быть сведена к ЗФДI с помощью замены переменных, и для ее решения можно использовать ε -приближенный алгоритм из предыдущего пункта. Однако, непосредственно для ЗФД2 удается построить алгоритм, обладающий лучшими оценками.

Для этого, наряду с исходной задачей, рассмотрим задачу А2, которая отличается от задачи АI только тем, что ограничение (3.4) заменяется ограничением:

$$y_i=0\vee 1;\ x_i\geqslant 0;\ y_i\geqslant \operatorname{sign} x_i;\ i=\overline{1,n} \tag{3.9}$$

Оказывается, что и в этом случае верны леммы I, 3, а также лемма 2'.

<u>Лемма 2'</u>. Существует оптимальное решение задачи А2, в которой не более чем одна переменная x_i отлична от 0.

Алгоритм получения ε' -оптимального решения ($\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon'<\varepsilon$)

задачи А2 состоит из следующих шагов.

1. Строим гарантированную оценку $\hat{f}$.

2. Упорядочиваем элементы по неубыванию отношений c_i'/a_i' . Элементы, у которых $a_i'=0$, располагаем раньше всех остальных; считаем, что c_n' в новой нумерации больше нуля, т.к. в противном случае задача сводится к обычной задаче о выборе.

3. Полагаем $A_0'=B_0'=0$, $S(0)=1$.

4. Выполняем n шагов для $k=\overline{1,n}$, на каждом из которых осуществляются следующие итерации:

4.1. Производим k -сдвиг, в результате чего из последовательности наборов $\mathcal{L}(k-1)=\{A_j^{k-1}, B_j^{k-1}\}_{j=1}^{S(k-1)}$ получаем новую последовательность наборов $\mathcal{L}=\{A_j^{k-1}+c_k'', B_j^{k-1}+a_k''\}_{j=1}^{S(k-1)}$

4.2. Отбрасываем в $\mathcal{L}$ те наборы, которые не удовлетворяют ограничению (3.4). Пусть R - количество наборов, оставшихся в $\mathcal{L}$. Если $R=0$, или $k\le m$, переходим к выполнению итерации 4.4.

4.3. Подсчитываем "рекорд", достигнутый на k -м шаге. Для этого вычисляем $\varphi_k=\max\limits_{j\in\overline{1,R}}\left(A_j^{k-1}+c_k''+\frac{B-B_j^{k-1}+a_k''}{a_k'}c_k'\right)$. При этом запоминается набор $(A_{j_k}^{k-1}+c_k'', B_{j_k}^{k-1}+a_k'')$, на котором достигается этот максимум, а также $x_k=\frac{B-B_{j_k}^{k-1}-a_k''}{a_k'}$.

4.4. Сливаем последовательности $\mathcal{L}(k-1)$ и $\mathcal{L}$, сохраняя упорядоченность по неубыванию первой компоненты наборов.

4.5. В полученной в результате слияния последовательности выбрасываются δ -близкие ($\delta=\hat{f}\varepsilon'/(4n)$) наборы. Полученную в результате последовательность наборов обозначим $\mathcal{L}(k)$. Берем $S(k)$ равным количеству наборов в $\mathcal{L}(k)$.

5. В качестве генерируемого алгоритмом ε' -приближенного решения задачи А2 берем $\tilde{f} = \max\left\{A^n_{s(n)}, \max\limits_{m<k\leq n} \varphi_k\right\}$ и тот набор, на котором этот максимум достигается. Пусть k^* такое, что $\varphi_{k^*} = \tilde{f}$. В этом случае берем: $x_i = 0$, $i = \overline{1,n} \setminus k^*$; $x_{k^*} = \tilde{x}_{k^*}$; $y_{k^*} = 1$; $y_i = 0$; $i = \overline{k,n}$ и по набору $(A^{k^*-1}_{jk^*}, B^{k^*-1}_{jk^*})$ восстанавливаем остальные y_i; $i = \overline{1,(k^*-1)}$ (в случае, если $\tilde{f} = A^n_{s(n)}$, берем $x_i = 0$; $i = \overline{1,n}$ и восстанавливаем y_i; $i = \overline{1,n}$ по набору $(A^n_{s(n)}, B^n_{s(n)})$ либо, используя стандартную процедуру обратного хода / 99 / и тогда трудоемкость и память алгоритма - $O(n^2/\varepsilon)$ либо с помощью дихотомической процедуры, описанной в предыдущем пункте, и тогда оценки алгоритма: трудоемкость - $O(\frac{n^2}{\varepsilon}\log n)$, память - $O(\frac{n}{\varepsilon})$.

Трудоемкость и память алгоритма оцениваются также, как и для обычной задачи о выборе (см.вторую главу). Для восстановления решения можно использовать либо процедуру обратного хода, либо дихотомическую процедуру, описанную выше.

Лемма 6. После переупорядочения элементов на шаге I существует оптимальное решение задачи А2 $(x^*, y^*) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ такое, что для некоторого r выполняется:

$$x_i^* = 0;\ i = \overline{1,n} \setminus r;\quad y_r^* = 1;\quad y_i^* = 0;\quad i = \overline{(r+1),n};$$

$$x_r^* = \begin{cases} B - \sum\limits_{i=1}^{r} a_i'' y_i^*, & \text{если } r > m, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Действительно, то, что $x_i^* = 0$ при $i > r$, следует из ограничения (3.9). Далее, если бы выполнялось $x_i^* > 0$, при $i < r$, то взяв новые значения $x_i^* = 0$ и $x_r^* = x_r^* + \frac{x_i^* a_i'}{a_r'}$, мы получили бы, вследствие правила упорядочения элементов, неменьшее значение целевого функционала.

Для построения ε -приближенного алгоритма ЗФДЗ рассмотрим задачу А3:

$$f_{A3} = \sum_{i=1}^{n} (x_i c_i' + (c_i' + c_i'') y_i) \to max \qquad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i' x_i + (a_i' + a_i'') y_i) \le B \qquad (3.11)$$

$$y_i = 0 \vee 1; \; x_i \ge 0, \text{целое}; \; y_i \ge sign\, x_i; \; i = \overline{1,n} \qquad (3.12)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\max_{i \in \overline{1,n}} (a_i' + a_i'') \le B$ и что из $a_i' = 0 \Rightarrow c_i' = 0$.

Легко видеть, что по допустимому решению задачи АЗ с помощью замены $u_i = x_i + y_i$; $i = \overline{1,n}$ получается допустимое решение ЗФДЗ с тем же значением целевой функции, а по допустимому решению ЗФДЗ с помощью замены $y_i = sign\, u_i$; $x_i = u_i - y_i$; $i = \overline{1,n}$ получается допустимое значение задачи АЗ с тем же значением целевой функции.

Алгоритм получения ε -оптимального решения задачи АЗ состоит из следующих шагов:

1. Строим гарантированную оценку $\hat{f}$.

2. Упорядочиваем элементы следующим образом: элементы, у которых $c_i' > \Delta = \frac{\varepsilon \hat{f}}{6}$ присваиваем номера от 1 до r; остальные элементы располагаются по неубыванию отношений c_i'/a_i', причем элементы, у которых $a_i' = 0$, располагаются раньше других; они получат номера от $r+1$ до m, где $m \le n$.

3. Проводим замену коэффициентов и переменных для первых элементов следующим образом:

Вводим новые коэффициенты:

$$\alpha_i^0 = c_i' + c_i'' \qquad \beta_i^0 = a_i' + a_i''$$
$$\alpha_i^1 = c_i' \qquad \beta_i^1 = a_i'$$
$$\alpha_i^2 = 2c_i' \qquad \beta_i^2 = 2a_i'$$
$$\alpha_i^3 = 4c_i' \qquad \beta_i^3 = 4a_i'$$

. . . .

$$\alpha_i^{\tau(i)} = 2^{\tau(i)-1} c_i' \qquad \beta_i^{\tau(i)} = 2^{\tau(i)-1} a_i',$$

где $\quad \tau(i) = \lceil \log_2 \frac{B - a_i' - a_i''}{a_i'} \rceil$

и новые переменные $\quad z_i^j;\ i=\overline{1,r};\ j=\overline{0,\tau(i)}.$

Рассмотрим новую задачу

$$f_z(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\tau(i)} \bar{\alpha}_i^j z_i^j \to \max \tag{3.I3}$$

$$g_z(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\tau(i)} \beta_i^j z_i^j \le B \tag{3.I4}$$

$$\tau(i) z_i^0 \geqslant \sum_{j=1}^{\tau(i)} z_i^j\ ;\ z_i^j = 0 \vee 1\ ;\ j=\overline{1,\tau(i)}\ ;\ i=\overline{1,r} \tag{3.I5}$$

где $\quad \bar{\alpha}_i^j = \lfloor \frac{\alpha_i^j}{\delta} \rfloor \delta\ ;\ \delta = \frac{\varepsilon^2 \hat{f}}{36}\ ;\ j=\overline{1,\tau(i)}\ ;\ i=\overline{1,r}.$

Замечание. Можно было бы не проводить замену коэффициентов, но тогда возникающая задача имела бы большую размерность.

4. Применяем к задаче (3.I3)-(3.I5) алгоритм динамического программирования, аналогичный алгоритму точного решения задачи о выборе с узкоблочными ограничениями (см. / 44, с.39 /). На последнем шаге алгоритма получаем такую последовательность наборов $\mathcal{L}$, что для любого допустимого решения z задачи (3.I3)-(3.I5) в $\mathcal{L}$ найдется ε - представитель (т.е. набор, соответствующий некоторому допустимому решению задачи (3.I3)-(3.I5), у которого первая компонента не меньше, чем $(f_z(z) - \varepsilon \hat{f}/6)$, а вторая компонента не больше, чем $g_z(z)$).

5. Применяем к полученной последовательности шаги 4, 5 предыдущего алгоритма с новым правилом построения "рекорда".

Новый "рекорд" подсчитывается следующим образом ($K > m$):

$$\Phi_K = \max_{j \in \overline{1,R}} \left(A_j^{K-1} + c_K' + c_K'' + \lfloor \frac{B - B_j^{K-1} - a_K' - a_K''}{a_K'} \rfloor c_K' \right).$$

Утверждение. Предложенный алгоритм вырабатывает ε -оптимальное решение ЗФДЗ и характеризуется следующими оценками: трудоемкость - $O\left(\frac{n}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$, память - $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}+\frac{n}{\varepsilon^2}\right)$ в случае, если для восстановления решения применяется процедура обратного хода и, соответственно, $O\left(\frac{n}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}+n^2\log\frac{n}{\varepsilon}\right)$, $O\left(\frac{n}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, если применяется дихотомическая процедура.

Доказательство. Оценим погрешность алгоритма. Так как $c_i^{'}>\Delta$ для $i=\overline{1,r}$, то в оптимальное решение войдет не более $\frac{\hat{f}}{\Delta}=\frac{6}{\varepsilon}$ таких элементов. Следовательно, полученная в результате округления α_i^j - погрешность $П_I$ не превосходит $6\delta/\varepsilon \le \varepsilon f^*/3$. Погрешность $П_2$, накопленная на шаге 5 за счет применения алгоритма ЗФДЗ, также не превосходит $\varepsilon' f^*=\frac{\varepsilon f^*}{3}$, а погрешность, получаемая за счет округления при подсчете "рекорда", $П_3 \le \Delta$. Таким образом, общая погрешность $\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 \le \varepsilon f^*$.

Оценим теперь трудоемкость алгоритма.

Трудоемкость выполнения: первого шага - $O(n^2)$; второго шага - $O(n\log n)$; третьего шага - $O(n\log\frac{1}{\varepsilon})$; четвертого шага - $O\left(\sum_{i=1}^{r}\tau(i)\frac{\hat{f}}{\delta}\right)\sim O\left(\frac{n}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$, т.к. $\tau(i)=\left\lceil \log_2\frac{B-a_i^{'}-a_i^{''}}{a_i^{'}}\right\rceil < \left\lceil\log_2\frac{\hat{f}}{\Delta}\right\rceil=\left\lceil\log_2\frac{6}{\varepsilon}\right\rceil$; пятого шага - $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)$ для нахождения $\tilde{f}$ и, если используется дихотомическая процедура восстановления решения, дополнительно $O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\log n\right)$. Оценки для памяти алгоритма получаются аналогично.

В заключение отметим, что предложенный для ЗФДЗ алгоритм пригоден, практически без изменений, для получения ε -приближенного решения задачи, в которой добавлены условия $u_i \le n_i$; $i=\overline{1,n}$, где n_i - заданы.

§ 2. Задачи распределения капитальных вложений в иерархических системах и методы их решения.

Как отмечалось в первой главе, задачи с иерархической структурой ограничений представляют собой один из важных классов задач распределения капитальных вложений, поскольку такие ограничения позволяют учитывать взаимозависимость строительных объектов, иерархию строительных организаций и ряд других важных факторов.

В настоящем параграфе строятся эффективные приближенные алгоритмы для двух типов таких задач. Первый из них предназначен для учета взаимозависимости строительных объектов, второй – для учета регионального аспекта капитальных вложений, иерархии строительных организаций и ряда других факторов. Для моделирования первого типа задач применяется задача выбора с древовидными ограничениями, а второго – блочная задача выбора (БЗВ). Формальные постановки задач приведены в первой главе (см. (I.8)-(I.9) и (I.10)-(I.13)).

Впервые ε -приближенный алгоритм для/ЗРДI был построен в работе / 94 /. Трудоемкость этого алгоритма $T \sim O(\frac{1}{\varepsilon} n^{\frac{1}{\varepsilon}+1})$. Первые быстрые алгоритмы для ЗРД были разработаны в работе / 95 /. Оценки этих алгоритмов: для ЗРДI – $T \sim O(\frac{n^3}{\varepsilon})$, $M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$; для ЗРД2 – $T \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon} + n^2 \log n)$, $M \sim O(n^2/\varepsilon)$; для ЗРД3 – $T = M \sim O(\frac{K n^3}{\varepsilon})$, где K – количество деревьев.

В настоящей работе для ЗРДI построен ε -приближенный алгоритм с оценками $T = M \sim O(\frac{nR}{\varepsilon})$, где R – количество висячих вершин, а для ЗРД2 и ЗРД3 ε -приближенные алгоритмы с оценками $T = M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$. Следует также отметить, что эти задачи рассматриваются не только в максимизационной, но и в минимизационной постановках, что имеет важное значение для практических приложений.

Построение алгоритмов с лучшими, чем в / 95 / оценками, стало возможным за счет: а) построения для ЗРД1 в минимизационной постановке (ЗРД1 min) априорной гарантированной оценки оптимального значения целевой функции (АГО) (т.е. величины $\hat{f}$: $\frac{1}{2}\hat{f} \leq \leq f^* \leq \hat{f}$, где f^* - оптимальное значение целевой функции);
б) применения к ЗРД2 динамического метода разбиения на интервалы / 101 / вместо метода шкалирования, который использовался в / 95 /;
в) непосредственного решения ЗРД1 и ЗРД2 вместо перехода к двойственным задачам, как в / 95 /. На практическую важность построения алгоритмов с улучшенными оценками было указано в предыдущем параграфе.

Перейдем к рассмотрению ЗРД1. Введем следующие обозначения:
t_v - вершина графа G , такая, что $U_{v,t_v} \in U$, т.е. вершина, следующая непосредственно за вершиной v ;
N_v - номер вершины v ;
$S(v) = v \cup \langle \omega \mid \omega \in V \wedge \omega \succ v \rangle$ - множество, состоящее из вершины v и тех вершин, включение которых в план необходимо для включения в план вершины v ;
$T(i)$ - подграф графа G , состоящий из вершин, входящих в множество $S(v_i)$ и связывающих их дуг;
$\bar{R}$ - множество висячих вершин;
$c_i' = \sum\limits_{v_j \in S(v_i)} c_j$ - эффект от включения вершины v_i и всех предшествующих ей в план;
$a_i' = \sum\limits_{v_j \in S(v_i)} a_j$ - требуемый для включения в план вершины v_i и всех предшествующих ей объем капитальных вложений;
$p_i = c_i'/a_i'$ - плотность выгоды поддерева $T(i)$;

$$\tau(i) = \begin{cases} i-1, & \text{если } v_i \in \bar{R}; \\ \min\limits_{v_j \in S(v_i) \setminus v_i} j - 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Опишем алгоритм получения АГО для ЗРДI $_{min}$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{i \in \overline{1,n}} a_i' \geq B$, т.к. в противном случае задача не имеет решения.

Шаг I. Берем $L = \varnothing$; $\hat{f} = \max_{i \in \overline{1,n}} c_i'$; $M1 = M2 = 0$; $j = 1$. Упорядочиваем вершины в порядке неубывания p_i . Для удобства изложения сохраним прежнюю нумерацию вершин.

Шаг 2. Если $M1 + a_j' \geq B$, то $\hat{f} = \min\{\hat{f}, T + c_j'\}$ и переходим к шагу 3. Если $M1 + a_j' < B$, то $M2 = M2 + c_j'$; $M1 = M1 + a_j'$; $L = L \cup S(v_j)$.

Шаг 3. Увеличиваем j на единицу. Если $j > n$, то алгоритм кончает работу. Если $v_j \in L$, то $j = j + 1$ и перейти к шагу 3. Перейти к шагу 2.

Доказательство того, что в результате работы алгоритм действительно вырабатывает $\hat{f}$: $\frac{1}{2}\hat{f} \leq f^* \leq \hat{f}$, а также того, что трудоемкость описанного алгоритма $T \sim O(n \log n)$, проводится также, как доказательство аналогичного факта для задачи с фиксированными доплатами (см. вторую главу) и вследствие громоздкости здесь не приводится.

Для построения ε -приближенного алгоритма для ЗРДI введем новую нумерацию вершин. Процесс нумерации заключается в следующем:
I^0. Присваиваем первый номер произвольной висячей вершине $v \in \overline{R}$.
2^0. Пусть v - последняя из нумерованных вершин. Если все вершины из множества $S(t_v) \setminus t_v$ занумерованы, то вершина t_v получает номер $N_v + 1$. В противном случае номер $N_v + 1$ присваивается произвольной ненумерованной вершине $\omega \in \overline{R} \cap S(t_v)$.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет занумерована корневая вершина (ясно, что она получит номер n). Трудоемкость процесса нумерации $T \sim O(n \log n)$. Введенные понятия и нумерацию иллюстрирует рисунок I. Например, здесь:

$R = 6$; $\overline{R} = \{ v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9 \}$; $t_{v_1} = v_2$; $t_{v_2} = t_{v_3} = t_{v_4} = v_5$; $S(v_2) = \{ v_1, v_2 \}$; $S(v_5) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$; $S(v_8) = \{ v_6, v_7, v_8 \}$; $\tau(5) = \tau(11) = 0$; $\tau(4) = 3$; $\tau(8) = 5$.

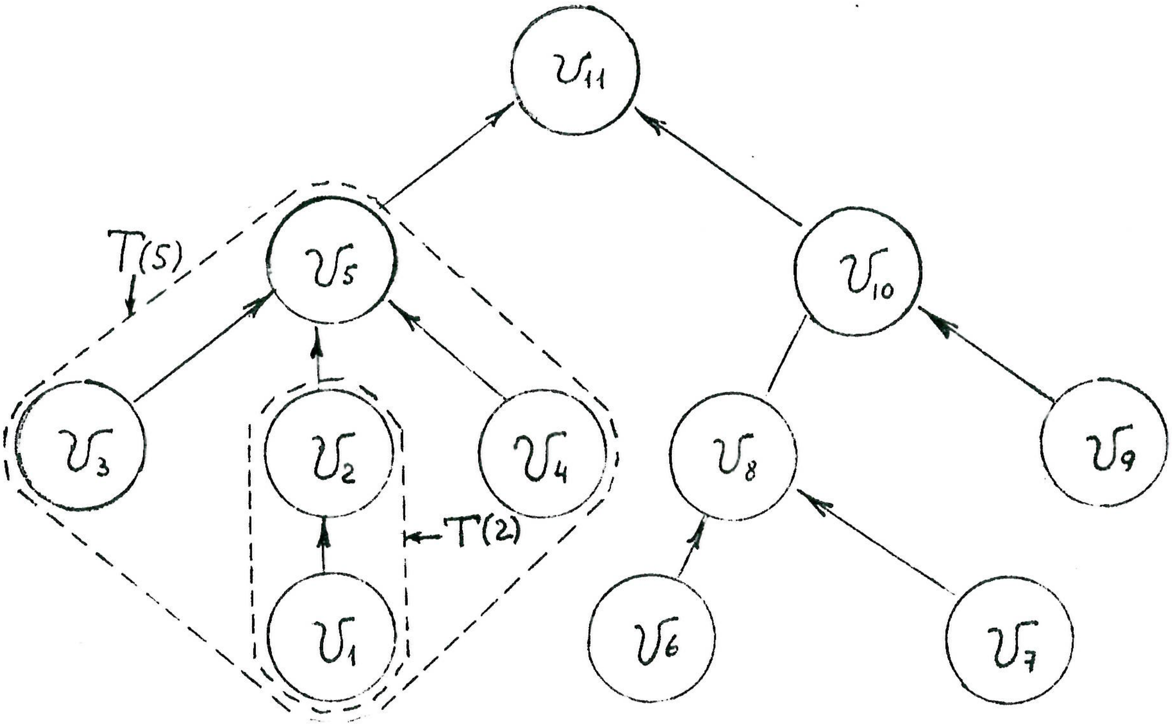

Рис.I

Алгоритм построения ε -приближенного решения для ЗРДI основан на динамической схеме разбиения на интервалы /IOI/ и состоит из одной предварительной и n - основных итераций. В результате выполнения k -й основной итерации строится последовательность наборов $\mathcal{L}^k = \{ C_j^k, A_j^k \}_{j=1}^{\Psi(k)}$, где $\Psi(k) < \lceil \frac{2R}{\varepsilon} \rceil$ и для $\forall j \in \overline{1, \Psi(k)}$ $\exists$ подмножество W_j^k множества $\{ 1, 2, \ldots, k \}$ допустимое для ЗРДI (т.е. удовлетворяющее ограничениям порядка) такое, что $\sum_{\ell \in W_j^k} c_\ell'' = C_j^k$; $\sum_{\ell \in W_j^k} a_\ell'' = A_j^k$, причем подмножество $W_{\Psi(n)}^n$ является ε -приближенным решением задачи. Опишем алгоритм по шагам.

Шаг I. Строим АГО и производим округление исходных данных:

для $i = \overline{1,n}$ берем $c_i'' = \lfloor c_i' / \omega \rfloor$, где $\omega = \lfloor \varepsilon f / (2R) \rfloor$. Формируем исходную последовательность $\mathcal{L}^0 = (C_1^0, A_1^0)$, где $C_1^0 = A_1^0 = 0$. Берем: $\psi(0) = 1$.

Шаг 2. Повторяется для $K = \overline{1,n}$ и состоит из следующих пунктов.

2.1. Формируем новую последовательность наборов

$$\mathcal{L} = \left\{ C_j^{\tau(K)} + c_K'' , A_j^{\tau(K)} + a_K'' \right\}_{j=1}^{M} , \text{ где } M = \max\left\{ j \,/\, A_j^{\tau(K)} + a_K'' \le B \right\}.$$

2.2. Сливаем последовательности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{K-1}$, отбрасывая доминируемые и сохраняя упорядоченность по возрастанию первой компоненты (из двух наборов с равными первыми компонентами отбрасывается тот, у которого вторая компонента больше; из двух равных - отбрасывается набор из последовательности $\mathcal{L}^{K-1}$). В результате получаем последовательность $\mathcal{L}^K$. Через $\psi(K)$ обозначается количество наборов в этой последовательности.

Подмножество $W^n_{\psi(n)}$ будет ε -приближенным решением задачи. Для восстановления этого подмножества можно использовать стандартную процедуру обратного хода, подробно изложенную в / 99 /. Обоснование оценок трудоемкости, памяти и погрешности алгоритма проводится стандартным образом (см. предыдущую главу) и следует из того, что в оптимальное решение (впрочем, как и в любое другое допустимое для ЗРДI) войдет не более R поддеревьев, каждое из которых определяется своей корневой вершиной - v_i, "эффектом" - c_i' и "весом" - a_i' ($i = \overline{1,n}$). Отметим, что при $\omega = 1$ и целых c_i алгоритм вырабатывает точное решение исходной задачи. Оценки точного алгоритма $T = M \sim O(nf^*)$.

При решении задачи в минимизационной постановке меняется правило доминирования (из двух наборов с равными первыми компонентами отбрасывается тот, у которого вторая компонента меньше) и из последовательности $\mathcal{L}$ дополнительно исключаются те наборы, первая компонента которых превосходит $\hat{f}$, а также все, кроме имеющего минимальное значение первой компоненты, наборы, вторая компонента которых превосходит B.

Перейдем теперь к ЗРД2. Используем ту же нумерацию вершин, что и в ЗРДI (предварительно меняем направление дуг). Обозначим для всех $i \in \overline{1,n}$:

$d(i)$ – множество дуг, выходящих из вершины v_i (ниже $k \in \overline{1,d(i)}$);

$\tau 1(i)$ – номер вершины, непосредственно за которой следует v_i;

$\tau 2(i)$ – множество номеров вершин, следующих непосредственно за v_i;

$\ell(i,k)$ – номер k-й в порядке нумерации вершины, следующей за v_i;

G_k^i – подграф графа G, образованный вершинами с номерами меньшими $\ell(i,k)$, и вершинами из $S(v_{\ell(i,k)})$;

G_0^i – подграф графа G, образованный вершинами с номерами, меньшими $\tau(i)$, и вершинами из $S(v_i)$.

Введенные обозначения иллюстрируют рис.2.

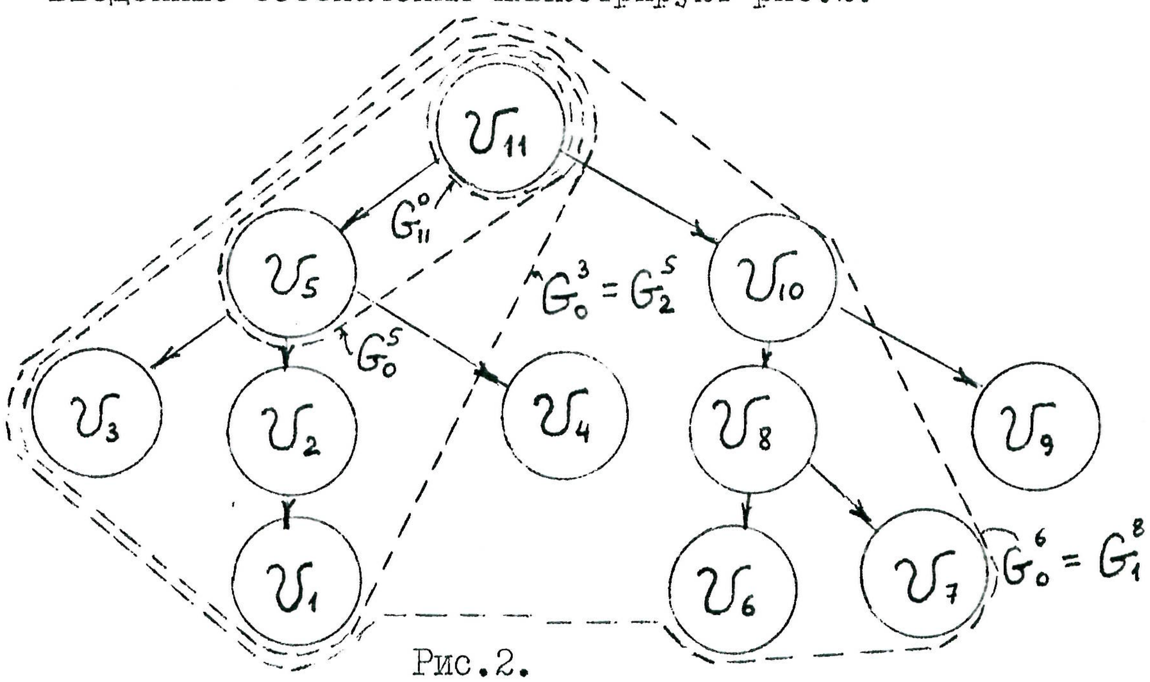

Рис.2.

Например здесь: $d(1)=0$; $d(2)=1$; $d(3)=0$; $\tau 1(1)=2$; $\tau 1(2)=\tau 1(3)=\tau 1(4)=5$; $\tau 2(1)=\emptyset$; $\tau 2(2)=\{1\}$; $\tau 2(5)=\{2,3,4\}$; $\ell(5,2)=3$; $\ell(10,1)=8$; $S(v_1)=\{v_1, v_2, v_5, v_{11}\}$; $S(v_2)=\{v_2, v_5, v_{11}\}$; $S(v_3)=\{v_3, v_5, v_{11}\}$.

Алгоритм построения ε -приближенного решения для ЗРД2 основан на динамической схеме разбиения на интервалы / 4 /. При применении алгоритма для вершины v_i ($i=\overline{1,n}$) строится ($d(i)+1$)-последовательность наборов $\mathcal{L}_k^i=\{C_k^i(j); A_k^i(j)\}_{j=1}^{\Psi_k^i}$ (где $k=\overline{0,d(i)}$; $\Psi_k^i \leq \lceil \frac{n-1}{\varepsilon} \rceil$), соответствующих подграфам $G_0^i, G_1^i, \ldots, G_{d(i)}^i$. При этом, так же как и в алгоритме для ЗРДI, для $\forall j \in \overline{1,\Psi_k^i}$ $\exists$ подмножество вершин $W_k^i(j)$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$, допустимое для ЗРД2 такое, что: $q \in W_k^i(j) \Rightarrow$ $\Rightarrow v_q \in G_k^i$; $\sum_{q \in W_k^i(j)} c_q = c_k^i(j)$; $\sum_{q \in W_k^i(j)} a_q = a_k^i(j)$.

Порядок построения последовательностей тот же, что и в / 95/: для всех $i \in \overline{1,n}$ и $0 \leq k < q \leq d(i)$, $\mathcal{L}_k^i$ строится раньше, чем $\mathcal{L}_q^i$; последовательность $\mathcal{L}_{(q-1)}^i$ - раньше, чем $\mathcal{L}_0^{\ell(i,q)}$ и последовательность $\mathcal{L}_{d[\ell(i,q)]}^{\ell(i,q)}$ раньше, чем $\mathcal{L}_q^i$. Например, для графа на рис.2 порядок построения последовательностей следующий: $\mathcal{L}_0^{11}$, $\mathcal{L}_0^5$, $\mathcal{L}_0^2$, $\mathcal{L}_0^1$, $\mathcal{L}_1^2$, $\mathcal{L}_1^5$, $\mathcal{L}_0^3$, $\mathcal{L}_2^5$, $\mathcal{L}_0^4$, $\mathcal{L}_3^5$, $\mathcal{L}_1^{11}$, $\mathcal{L}_0^{10}$, $\mathcal{L}_0^8$, $\mathcal{L}_0^6$, $\mathcal{L}_1^8$, $\mathcal{L}_0^7$, $\mathcal{L}_2^8$, $\mathcal{L}_1^{10}$, $\mathcal{L}_0^9$, $\mathcal{L}_2^{10}$, $\mathcal{L}_2^{11}$.

Построение последовательностей $\mathcal{L}_k^i$ производится по следующим правилам:

I^0. Если $a_m > B$, то алгоритм кончает работу и $f^*=0$. В противном случае берем: $\mathcal{L}_0^n=(c_n, a_n)$, $\Psi_0^n=1$, $\omega=c_n$.

2^0. Если $k=0$, $i<n$, $i=\ell(\tau 1(i), q)$ и последовательность $\mathcal{L}_{(q-1)}^{\tau 1(i)}$ построена, то последовательность $\mathcal{L}_0^i=\{C_\beta^\alpha(j)+ +c_i, A_\beta^\alpha(j)+a_i\}_{j=1}^{\Psi_0^i}$,

где $\alpha = \tau_1(i)$, $\beta = q-1$, $\Psi_0^i = \max\{ j \mid A_\beta^\alpha(j) + a_i \le B \}$. Берем $\omega = \max\{\omega, C_0^i(\Psi_0^i)\}$.

3^0. Если $0 < k \le d(i)$ и последовательности $\mathcal{L}^i_{(k-1)}$ и $\mathcal{L}^{\ell(i,k)}_{d[\ell(i,k)]}$ построены, то разбиваем отрезок $[0, \omega]$ на $\lceil \frac{n-1}{\varepsilon} \rceil$ равных интервала. Последовательность $\mathcal{L}^i_k$ состоит из тех наборов последовательностей $\mathcal{L}^i_{(k-1)}$ и $\mathcal{L}^{\ell(i,k)}_{d[\ell(i,k)]}$, которые остаются после отбрасывания доминируемых наборов. Здесь применяется следующее правило доминирования: из двух наборов, первые компоненты которых попадают в один и тот же интервал, сохраняется тот, у которого вторая компонента меньше. Если наборы равны, то сохраняется набор из $\mathcal{L}^i_{(k-1)}$.

Поскольку для любой итерации $\omega \le f^*$ и производится не более ($n-1$)-го слияния последовательностей, несложно показать, что $W^n_{d(n)}(\Psi^n_{d(n)})$ будет ε-приближенным решением задачи. Метод восстановления этого подмножества подробно описан в / 99 /. Оценка трудоемкости и памяти алгоритма следуют из того, что общее количество конструируемых последовательностей наборов равно $2n$, а количество наборов в каждой последовательности не превосходит $\lceil \frac{n-1}{\varepsilon} \rceil$. Обоснование оценок проводится стандартным образом.

Перейдем теперь к рассмотрению ЗРД2 в минимизационной постановке (ЗРД2$_{min}$). Заметим, что алгоритм, основанный на динамической схеме разбиения на интервалы, неприменим к ЗРД2$_{min}$ вследствие того, что достигнутое на какой-либо итерации значение целевой функции (ω) не является оценкой сверху оптимального значения целевой функции и разбиение на интервалы может привести к сколь угодно большой погрешности. Для получения ε-приближенного решения для ЗРД2$_{min}$ применяется метод шкалирования / IOI /. Для применения этого метода необходимо иметь АГО. Опишем алгоритм построения АГО для ЗРД2$_{min}$.

Алгоритм построения АГО состоит из двух этапов: на первом строится оценка $\tilde{f}: \frac{1}{n}\tilde{f} \le f^* \le \tilde{f}$; на втором, с использованием $\tilde{f}$, строится $\hat{f}: \frac{1}{2}\hat{f} \le f^* \le \hat{f}$. Алгоритм построения $\tilde{f}$ состоит из двух шагов.

Шаг I. Берем: $\tilde{f} = c_n, \omega = a_n, \mathcal{L} = n$.

Шаг 2. Если $\omega \geqslant B$, алгоритм заканчивает работу. В противном случае определяем $i : c_i = \min\limits_{\tau_1(j) \in \mathcal{L}} c_j$, берем $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup i$, $\tilde{f} = \tilde{f} + c_i, \omega = \omega + a_i$ и переходим к шагу 2.

Доказательство условия $\frac{1}{n}\tilde{f} \le f^* \le \tilde{f}$ следует из того очевидного факта, что $\max\limits_{i \in W} c_i \geqslant \max\limits_{i \in \mathcal{L}} c_i$, где $W \subset \{1,2,\dots,n\}$ произвольное допустимое для ЗРД2 $_{min}$ решение, а $\mathcal{L}$ -список, полученный в результате работы алгоритма. Оценки трудоемкости и памяти алгоритма: $T \sim O(n \log n)$, $M \sim O(n)$.

На втором этапе построения АГО используется алгоритм $A(P)$, позволяющий по любому заданному значению P определить, что либо $f^* \le \frac{3P}{2}$, либо $f^* \geqslant \frac{P}{2}$. Этот алгоритм использует модификацию правил I^0–3^0 и тот же порядок формирования последовательностей, что и $\mathcal{E}$ -приближенный алгоритм для ЗРД2.

$0'$. Производим округление исходных данных: для $i = \overline{1,n}$ берем $c_i' = \lfloor \frac{c_i}{K} \rfloor$, где $K = \frac{P}{2n}$.

I',$2'$. Аналогичны I^0 и 2^0, только вместо c_i -х используются c_i' -е и в $2'$ дополнительно отбрасываются те наборы, первая компонента которых превосходит $2n$.

$3'$. Аналогично 3^0, но с правилом доминирования из ЗРДI $_{min}$.

Поскольку абсолютная погрешность получаемого решения не превосходит $\frac{P}{2}$, ясно, что если $\max\limits_{1 \le j \le \Psi^n_{d(n)}} A^n_{d(n)}(j) \geqslant B$, то $f^* \le \frac{3P}{2}$, а в противном случае $f^* \geqslant \frac{P}{2}$. Трудоемкость алгоритма $A(P)$: $T \sim O(n^2)$. Для построения АГО для ЗРД2 $_{min}$ алгоритм $A(P)$ применяется последовательно с $P = P_1 = \frac{4\tilde{f}}{n}; 2P_1; 4P_1; \dots$ до тех пор, пока не выполнится условие $f^* \leq \frac{3P}{2}$. Это условие выполняется не позднее, чем через $\log_2 n$ итераций. Пусть алгоритм закончит работу при $P = \widetilde{P}$. Поскольку $f^* \geq \frac{\widetilde{P}}{4}$ (иначе алгоритм закончил бы работу на предыдущей итерации), имеем $\frac{\widetilde{P}}{4} \leq f^* \leq \frac{3\widetilde{P}}{2}$. Применяя алгоритм $A(\frac{3\widetilde{P}}{2})$ с $K = \frac{3\widetilde{P}}{4n}$, получаем $\hat{f} = \sum_{i \in W^n_{d(n)}(\varphi^n_{d(n)})} c_i$. При этом $\frac{1}{2}\hat{f} \leq f^* \leq \hat{f}$. Применяя далее алгоритм $A(\hat{f})$ с $K = \frac{\varepsilon \hat{f}}{4n}$, получаем ε - приближенное решение ЗРД2$_{min}$. Оценки трудоемкости и памяти ε - приближенного алгоритма для ЗРД2$_{min}$: $T \sim O(n^2 \log n + \frac{n^2}{\varepsilon})$, $M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$.

Рассмотрим ЗРД3. Разобьем множество поддеревьев этой задачи на два подмножества так, что в первое входят все поддеревья, порядок в которых от висячих вершин к корневой, а во второе - все остальные поддеревья (в том числе и состоящие ровно из одной вершины). Добавляем в первое подмножество фиктивную вершину $\overline{v_1}$, а во второе - $\overline{v_2}$. Положим $c_{\overline{v}_1} = c_{\overline{v}_2} = a_{\overline{v}_1} = a_{\overline{v}_2} = 0$. Соединяем вершину $\overline{v_1}$ со всеми корневыми вершинами первого множества дугами, направленными к $\overline{v_1}$, а вершину $\overline{v_2}$ со всеми корневыми вершинами второго множества дугами, направленными от $\overline{v_2}$. В результате получаем два графа G_1 и G_2. В первом порядок от висячих вершин к корневой, а во втором - от корневой к висячим. Используя граф G_1 и ограничение по объему капитальных вложений из ЗРД3, получаем вспомогательную ЗРДI и, решая ее с $\varepsilon = \frac{1}{2}$, вычисляем $\overline{f_1}$. Аналогично получаем ЗРД2 и $\overline{f_2}$. Несложно убедиться, что $(\overline{f_1} + \overline{f_2})/2 \leq f^* \leq 2(\overline{f_1} + \overline{f_2})$. Производим округление исходных данных с $K = \frac{\varepsilon(\overline{f_1} + \overline{f_2})}{2n}$, ищем точное решение полученной ЗРДI и используем последовательность, полученную на последнем шаге в качестве первой при решении ЗРД2. В последней полученной для ЗРД2 последовательности находим ε -приближенное решение ЗРД3. Оценки описанного алгоритма: $T = M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$.

Предложенный алгоритм не удается применить к ЗРД3 min , поскольку для нее не удается столь же просто получить АГО. Однако для построения АГО для этой задачи можно применить алгоритм, аналогичный алгоритму для ЗРД2 min , в результате чего в оценку трудоемкости добавляется слагаемое $n^2 \log n$.

Перейдем к рассмотрению блочной задачи выбора (I.I0)-(I.I3). Введем следующие обозначения:

$\varphi(j) = \langle \ell \mid \ell \in \overline{0,m} : \mathcal{I}_j \subset \mathcal{I}_\ell \rangle$ – номера множеств, подмножеством которых является $\mathcal{I}_j$;

$\tau(j) = |\varphi(j)|$ – количество элементов множества $\varphi(j)$.

Величину $\tau(j)$ назовем рангом $\mathcal{I}_j$. Берем $\tau = \max\limits_{j \in \overline{0,m}} \tau(j)$; $\psi(j) = \langle \ell \mid \mathcal{I}_\ell \subset \mathcal{I}_j$ при $\ell \in \overline{1,m}$ и $\tau(\ell) = \tau(j) - 1 \rangle$; $\gamma(j) = |\psi(j)|$; $\pi(j) = |\mathcal{I}_j|$.

Алгоритм, вырабатывающий ε -приближенное решение для БЗВ, основан на динамической схеме разбиения на интервалы, так же как и алгоритм для ЗРД2. Этот алгоритм вырабатывает для множеств $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_m$ последовательности наборов $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots,$ $\mathcal{L}_m$, причем для всех $K \in \overline{0,m}$ последовательность $\mathcal{L}_K = \{\alpha_K, \beta_K\}_{\alpha_K \in Y(\mathcal{L}_K)}$ обладает следующими свойствами: а) для $\forall \alpha_K \in Y(\mathcal{L}_K)$ $\exists$ подмножество W множества $\mathcal{I}_K$, допустимое для БЗР такое, что $\sum\limits_{i \in W} c_i = \alpha_K$, $\sum\limits_{i \in W} a_i = \beta_K$; б) для любого допустимого подмножества W_1 множества $\mathcal{I}_K$ в последовательности $\mathcal{L}_K$ $\exists$ набор (α_K, β_K) такой, что

$$\sum_{i \in W_1} c_i \le \alpha_K + (\varepsilon \pi(K) \max_{\alpha_K \in Y(\mathcal{L}_K)} \alpha_K)/n , \quad \sum_{i \in W_1} a_i \ge \beta_K .$$

Пусть $\mathcal{I}_K = \{i_1, i_2, \dots, i_{\pi(K)}\}$ такое, что $\psi(K) = \emptyset$. Алгоритм построения последовательности $\mathcal{L}_K$ состоит из трех шагов (алгоритм BI).

Шаг I. Берем $\omega = \alpha_K = \beta_K = Y(\mathcal{L}_K) = 0$; $\mathcal{L}_K = (\alpha_K, \beta_K)$; $j = 1$.

Шаг 2. Строим последовательность наборов

$$\mathcal{L} = \{\alpha_K + c_{ij}, \beta_K + a_{ij}\}_{\alpha_K \in Y(\mathcal{L}_K)} : \beta_K + a_{ij} \leq B_K .$$

Подсчитываем $\omega = \max\{\omega, \max_{\alpha \in Y(\mathcal{L})} \alpha\}$ и разбиваем отрезок $[0;\omega]$ на $\lceil \frac{n}{\varepsilon} \rceil$ равных интервала. Используя последовательности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_K$, строим новую последовательность $\mathcal{L}_K$, сохраняя упорядоченность и отбрасывая доминируемые (как в ЗРД2).

Шаг 3. Увеличиваем j на 1 и если $j \leq \pi(K)$, переходим к шагу 2, в противном случае алгоритм кончает свою работу.

С помощью приведенного алгоритма можно построить последовательности наборов для всех множеств, для которых $\Psi(j) = \emptyset$. Рассмотрим теперь произвольное множество J_K такое, что $\Psi(K) \neq \emptyset$ и покажем как, имея последовательности $\mathcal{L}_j$ для всех $j \in \Psi(K)$, построить $\mathcal{L}_K$. Пусть $\Psi(K) = \{S_1, S_2, \ldots, S_{\gamma(K)}\}$. Алгоритм построения $\mathcal{L}_K$ состоит из трех шагов (алгоритм В2).

Шаг 1. Берем $\alpha_K = \beta_K = Y(\mathcal{L}_K) = 0$; $\mathcal{L}_K = (\alpha_K, \beta_K)$; $j=1$.

Шаг 2. Подсчитываем $\omega = \max\{\alpha_K + \alpha_{S_j} \mid \beta_K + \beta_{S_j} \leq B_K\}$ и разбиваем отрезок $[0;\omega]$ на $\lceil \frac{n}{\varepsilon} \rceil$ равных интервала. Строим новую последовательность $\mathcal{L}_K$, наборы которой являются покомпонентными суммами некоторых наборов из $\mathcal{L}_{S_j}$ и старой последовательности $\mathcal{L}_K$. Для построения новой $\mathcal{L}_K$ среди всех комбинаций α_K, α_{S_j}, сумма которых попадает в один интервал и таких, что $\beta_K + \beta_{S_j} \leq B_K$, выбираем ту, у которой значение суммы $\beta_K + \beta_{S_j}$ минимально.

Шаг 3. Увеличиваем j на 1 и если $j \leq \gamma(K)$, переходим к шагу 2, в противном случае алгоритм кончает свою работу.

При построении ε-приближенного решения БЗВ последовательности наборов строятся с помощью описанных алгоритмов для множеств, имеющих ранг τ, затем для множеств, имеющих ранг $\tau-1$ и т.д., пока не будет построена последовательность $\mathcal{L}_0$ для множества $\mathcal{J}_0$, имеющего ранг I. По тому набору последовательности $\mathcal{L}_0$, который имеет наибольшее значение первой компоненты, с помощью обратного хода восстанавливается ε -приближенное значение БЗВ.

Оценки ε -приближенного алгоритма для БЗР: $T \sim O(\frac{n^3}{\varepsilon^2})$, $M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$. Эти оценки легко могут быть получены благодаря тому факту, что в любой из построенных последовательностей $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ количество наборов не превосходит $\lceil \frac{n}{\varepsilon} \rceil$. Отсюда следует, что трудоемкость применения алгоритма BI к множеству $\mathcal{J}_k$ не превосходит $O(\frac{n\,\pi(k)}{\varepsilon})$, а общая трудоемкость применения алгоритма BI не превосходит $O(\frac{n^2}{\varepsilon})$, (т.к. он применяется только к тем множествам, которые не имеют непустых собственных подмножеств, а общее количество элементов в таких множествах - n). Оценка трудоемкости применения алгоритма B2 следует из того, что шаг 2 этого алгоритма, (трудоемкость которого $O((\frac{n}{\varepsilon})^2)$) повторяется при построении ε -приближенного решения не больше, чем n раз. Оценка погрешности алгоритма производится стандартным образом (см. вторую главу).

В случае, если рассматривается БЗВ в минимизационной постановке (БЗВ$_{min}$), динамическая схема разбиения на интервалы не применима по тем же соображениям, что и для ЗРД2$_{min}$. Для получения ε -приближенного решения применяется тот же метод, что и для ЗРД2$_{min}$, причем алгоритм построения АГО основан на тех же идеях. Оценки ε -приближенного алгоритма для БЗВ$_{min}$: $T \sim O(n^3 \log n + \frac{n^3}{\varepsilon^2})$, $M \sim O(\frac{n^2}{\varepsilon})$.

Отметим, что задача (I.14)-(I.18) является частным случаем БЗВ. Оценки ε -приближенного алгоритма для этой задачи: $T \sim O((\frac{rst}{\varepsilon})^2 st + p\frac{(rst)^2}{\varepsilon})$, $M \sim O(p\frac{(rst)^2}{\varepsilon})$.

§ 3. Совмещение задач распределения капитальных вложений с задачами календарного планирования

При решении ЗРКВ основным вопросом является определение объемов капитальных вложений, выделяемых каждому из объектов, проблема же развертывания строительства во времени не рассматривается. В связи с этим не учитываются ограничения по трудовым и материальным ресурсам, а также ограничения по имеющимся машинам и механизмам. При решении задач планирования на уровне министерства, главка, а также некоторых крупных трестов такое упрощение задачи оправдано. В то же время на более низких уровнях управления раздельное решение ЗРКВ и задач календарного планирования может привести к большим погрешностям. Более того, для осуществления контроля за выполнением планов и правильной организации снабжения, календарные планы строительства объектов (в укрупненной номенклатуре) необходимы и на уровнях строительных главков и министерств.

Настоящий параграф посвящен проблеме развертывания строительства во времени, возникающей после решения ЗРКВ. В нем рассматриваются вопросы формирования календарных планов выполнения работ на объектах строительства и прогнозирования времени выполнения этих планов с учетом вероятностного характера строительных процессов. Необходимость рассматривать строительство как систему вероятностную связана с большим влиянием на строительные процессы таких факторов как погодные условия, сроки поставок материальных ресурсов, и многих других. Благодаря учету случайных факторов при планировании возрастает надежность принимаемых планов и их устойчивость, что приводит к повышению эффективности процессов планирования и управления и увеличивает их оперативность. В последнее время появилось значительное количество теоретических работ по рассматриваемой тематике. Однако разрабатываемые алгоритмы носят, как правило, сугубо теоретический характер и не могут применяться на практике. В настоящей работе при создании методов решения задач, основное внимание уделяется реализуемости алгоритмов и возможности решения практических задач большой размерности.

В работе рассматривается комплекс, состоящий из трех взаимосвязанных задач. Первая из них состоит в прогнозировании продолжительности строительства объекта при заданном распределении ресурсов по работам. Вторая задача состоит в оптимизации распределения ресурсов по работам объекта при заданной директивной продолжительности выполнения объекта и надежности строительства, т.е. вероятности того, что реальная продолжительность строительства объекта не будет превосходить директивную. Также во второй задаче строится календарный план выполнения работ на объектах и определяется график поставок материальных ресурсов. Третья задача комплекса заключается в формировании годовой программы строительно-монтажных работ строительной организации и определении сроков строительства объектов с учетом ограничений по основным видам ресурсов.

В работе при решении комплекса задач календарного планирования и прогнозирования используются укрупненные сетевые модели объектов с объемами работ, выработками и составами единичных звеньев. Составы единичных звеньев на работах, т.е. минимальных звеньев, необходимых для выполнения данной работы, могут быть определены по ЕНИРам. Выработки могут быть определены: среднеожидаемая - по ЕНиРам, а максимальная на основе экспертных оценок.

В процессе функционирования системы выработки должны уточняться на основе собираемой статистики. Для учета влияния роста производительности труда на выработки, что особенно важно при составлении календарных планов для объектов, строительство которых продолжается многие годы, целесообразно применять регрессионный анализ. Применение предлагаемого комплекса задач особенно эффективно для тех строительных систем, в которых созданы комплексы укрупненных типовых технологических моделей / 60 /. Во многих строительных системах основными лимитирующими ресурсами являются трудовые. При этом бригады для выполнения работ на строительных объектах набираются каждый раз заново. Поэтому при решении первых двух задач комплекса учитываются ограничения только по трудовым ресурсам, причем эти ресурсы предполагаются однородными.

При решении рассматриваемого комплекса задач календарного планирования и прогнозирования применяется метод статистических испытаний (МСИ).

Целесообразность применения этого метода связана с несколькими факторами:

- во-первых, многие задачи календарного планирования (в том числе вторую и третью задачи из рассматриваемого комплекса) не удается решать на современных ЭВМ точными алгоритмами даже в детерминированной постановке. Это происходит из-за того, что трудоемкость большинства точных алгоритмов для таких задач растет как n^n, где n - размерность рассматриваемой задачи.

Ясно, что реальные задачи, размерность которых достигает десятков, сотен, а то и тысяч переменных, не могут быть решены с помощью таких алгоритмов. В то же время трудоемкость МСИ имеет порядок n^c, где c - константа или $n \log n$ в зависимости от специфики рассматриваемой задачи;

- во-вторых, в отличие от точных методов, трудоемкость МСИ при учете дополнительных ресурсов увеличивается незначительно, что позволяет в принципе учитывать при решении комплекса задач календарного планирования и прогнозирования ограничения по всем наиболее существенным ресурсам;

- в третьих, МСИ легко может применяться совместно с другими методами (точными, приближенными или эвристическими), используемыми в качестве подпрограмм, или использующими в качестве подпрограммы МСИ.

При решении первой задачи комплекса - прогнозировании времени окончания строительства объекта - предполагается, что время выполнения каждой работы подчинено β - распределению / 29 /. В качестве функции плотности случайной величины t_k - продолжительность выполнения k -й работы берем / 29 /

$$\varphi_k(t_k) = \frac{12}{(t_k^{(3)} - t_k^{(1)})^4} (t_k - t_k^{(1)})(t_k^{(3)} - t_k)^2,$$

где $t_k^{(1)}$ $(t_k^{(3)})$ - минимальная (максимальная) продолжительность выполнения k -й работы.

Опишем алгоритм прогнозирования времени строительства конкретного объекта в случае, когда известно количество выделенных для выполнения каждой из работ объекта звеньев и производительности каждого звена.

Шаг I. Производим предварительное переупорядочение работ так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

а) $i_k < j_k$; $k = \overline{1,n}$;

б) $i_1 = 1$;

в) $i_{(k+1)} - i_k = 1$; $k = \overline{1,(n-1)}$.

Здесь i_k - номер вершины, из которой k -я работа выходит, а j_k - номер вершины, в которую она входит.

Опишем в общих чертах алгоритм, позволяющий произвести необходимую перенумерацию вершин.

Шаг I.I. Находим начальные вершины, т.е. те,номера которых ни в одной из пар (i_k , j_k) не стоят на втором месте. Пусть таких вершин r . Засылаем I в счетчик S . Если $r=1$ присваиваем начальной вершине номер I, помечаем ее и переходим к следующему шагу. Если $r>1$, вводим дополнительную вершину, которую соединяем с начальными вершинами работами нулевой длительности. Присваиваем дополнительной вершине номер I, помечаем ее и переходим к следующему шагу. Если $r=0$, значит в сети имеется цикл. В этом случае алгоритм заканчивает работу и выдается соответствующее сообщение.

Шаг I.2. Находим те вершины, которые могут стоять на втором месте в парах (i_k , j_k) только в том случае, когда на первом месте стоит номер помеченной вершины. Пусть таких вершин r_1 . Если $r_1 \geq 1$, присваиваем этим вершинам номера от $S+1$ до $S+r_1$, в произвольном порядке. Берем $S=S+r_1$.

Если остались непомеченные вершины и $r_1=0$, значит в сети имеются тупики или циклы. В этом случае алгоритм заканчивает работу и выдается соответствующее сообщение. Если остались непомеченные вершины, перейти к шагу I.2.

Заметим, что аналогичный алгоритм может быть применен для перенумерации вершин и в том случае, когда сетевая модель задается в виде списка работ, для каждой из которых указаны номера всех предшествующих работ.

Шаг II. Подсчитываем минимальную и максимальную продолжительности выполнения K -й работы ($k=\overline{1,n}$, где n - количество укрупненных работ на объекте). Эти величины подсчитываются, исходя из выработок единичных звеньев по формулам:

$$t_k^{(1)} = v_k / (R_k \omega_k^{max}); \quad t_k^{(3)} = (5t_k^{(2)} - 2t_k^{(1)})/3,$$

где: v_k - объем k-й работы; R_k - количество единичных звеньев, выделяемое для выполнения k-й работы; $t_k^{(2)}$ - средне-ожидаемое время выполнения k-й работы, подсчитываемое по формуле: $t_k^{(2)} = v_k / (R_k \cdot \omega_k^{ож})$; w_k^{max} ($w_k^{ож}$) - максимальная (среднеожидаемая) выработка единичного звена на k-й работе.

Шаг Ш. Полагая для всех $k = \overline{1,n}$: $t_k = t_k^{(1)}$ $(t_k^{(3)})$, подсчитываем минимальную-TI (соответственно, максимальную-T2) продолжительность строительства объекта. Делим промежуток от TI до T2 на m равных интервалов в зависимости от требуемой точности прогнозирования (обычно $6 \le m \le 12$, т.к. при больших значениях m сильно увеличивается объем вычислений и уменьшается наглядность результатов.) Заводим для каждого из полученных интервалов счетчики числа попаданий, (S_j, $j = \overline{1,m}$) первоначально равные нулю.

Шаг IУ. Разыгрываем времена выполнения каждой из работ, подчиняющиеся β-распределению. Определяем продолжительность строительства объекта T, соответствующую этим временам. Определяем номер интервала j, в который попадает эта величина. Увеличиваем счетчик попаданий в этот интервал на I: $S_j = S_j + 1$. Переходим к разыгрыванию следующего цикла. Разыгрывание повторяется до тех пор, пока частота попаданий в интервалы не стабилизируется или пока не будет исчерпан выделенный лимит машинного времени. В случае, если условия "конец разыгрываний" не выполнены, шаг IУ повторяется.

Шаг У. Строим дискретную функцию распределения продолжительности строительства объекта следующим образом: $\rho_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j} S_j$, где N – общее число розыгрышей.

Полученные $\rho_j \ (j=\overline{1,m})$ равны вероятностям попадания продолжительности строительства объекта в один из первых j интервалов.

Шаг УI. Конец работы алгоритма.

Перейдем теперь к описанию второй задачи комплекса.

Целью этой задачи является наиболее равномерное распределение трудовых ресурсов при выполнении временных ограничений. Целевая функция записывается следующим образом:

$$M\left(\max_{0\le t\le T2}\sum_{k=1}^{n} R_k Z_k \overline{\varphi}_k(t,\omega)\right)\to \min$$

$$M\left(\sum_{i=1}^{T2}\sum_{k=1}^{n}(R_k Z_k)^2\,\overline{\varphi}_k(t,\omega)\right)\to \min$$

Причем требуется выполнение ограничения по срокам:

$$P(T \le T_{\mathcal{D}}) \ge P_{\mathcal{D}}$$

и всех стандартных технологических ограничений.

В модели использовались следующие обозначения:

$T_{\mathcal{D}}$ – директивный срок строительства объекта;

$P_{\mathcal{D}}$ – требуемая надежность (вероятность того, что объект будет построен к директивному сроку);

n – количество работ на объекте;

Z_k – количество рабочих в единичном звене на k-й работе $(k=\overline{1,n})$;

$t_k^{н}(\omega)$ – дата начала выполнения k-й работы;

$t_k^{o}(\omega)$ – дата окончания выполнения k-й работы;

ω – случайный фактор, влияющий на время выполнения работ;

$\overline{\varphi}_k(t,\omega) = sign\,(t - t_k^{н}(\omega)+1)\,sign\,(t_k^{o}(\omega) - t + 1)$;

$M(x)$ – математическое ожидание случайной величины x.

Таким образом, вторая задача комплекса является стохастич ской задачей лексикографической оптимизации с записанными в ви де математических ожиданий целевыми функциями и ограничениями вероятностной форме. Первый функционал показывает, что максима ное потребление трудовых ресурсов в каждый момент времени долж но быть минимально (т.е. не должно быть "пиков"), второй функц нал - то, что трудовые ресурсы распределяются равномерно и в " пиковые" периоды.

Решать точно данную задачу сложно, и, как правило, для пра тических приложений не нужно. Поэтому для ее решения применяютс различные приближенные эвристические алгоритмы. Опишем укрупнен простейший эвристический алгоритм решения этой задачи.

Шаг I. Считаем, что для выполнения каждой работы выделено одно единичное звено ($R_k = 1$; $k = \overline{1,n}$).

Шаг II. Применяем шаг III из предыдущего алгоритма, в результа те чего получаем T1 и T2. Если $T2 \leq T_D$, перейти к шагу IУ. Есл $T1 \geq T_D$, перейти к шагу III. Применяем шаг IУ из предыдущего алго-ритма, на котором вместо частот попадания в интервалы подсчитываем частоту попадания в интервал $[T1; T_D]$. Если полученная частота больше P_D , перейти к шагу IУ.

Шаг III. Подсчитываем $H = \sum_{k=1}^{n} R_k z_k \frac{t_k^{(2)}}{T_{ож}}$, где $T_{ож}$ - продолжительность строительства объекта в случае, если времена выполнения работ равны $t_k^{(2)}$ $(t_k = t_k^{(2)})$. Используя H в качестве ограничения по ресурсам, применяем алгоритм минимизации времени выполнения проекта из / I9 /, считая, что $t_k = \mathcal{V}_k / (\mathcal{V}_k^{ож} R_k)$. Пусть полученное время выполнения проекта - T . Увеличиваем количество звеньев, выделяемых для выполнения работ следующим образом:

$$\bar{R}_K = \begin{cases} \max\left\{\left\lfloor \frac{T_D \cdot R_K}{T} \right\rfloor ; R_K\right\}, & \text{если } K \text{ -я работа не является критической;} \\ \max\left\{\left\lceil \frac{T_D \cdot R_K}{T} \right\rceil ; R_K+1\right\}, & \text{если } K \text{ -я работа - критическая.} \end{cases}$$

Переходим к шагу П.

Шаг IУ. Рассчитываем ориентировочный календарный план выполнения работ на объекте и определяем сроки поставок материалов.

Составляем прогноз продолжительности строительства объекта при полученном распределении ресурсов.

Конец работы алгоритма.

Задача формирования календарного плана выполнения работ на объекте при заданном распределении единичных звеньев представляет собой самостоятельную проблему вследствие вероятностного характера строительных процессов. Наиболее рациональными подходами к ее решению представляются следующие:

I. Формирование календарных планов исходя из того, что выработки единичных звеньев максимальны. В этом случае $t_K = t'_K$; $K = \overline{1,n}$. Этот подход целесообразно применять для особо важных объектов.

2. Формирование наиболее "надежных" календарных планов. При применении этого подхода календарные планы строятся в предположении, что $t_K = (t_K^{(3)} + 2t_K^{(1)})/3$, т.е. что $t_K : \varphi_K(t_K) = \max\limits_{t_K^{(1)} \le t \le t_K^{(3)}} \varphi_K(t)$.

При формировании календарных планов исходя из первого подхода материалы и механизмы будут заказываться как правило раньше необходимых сроков, что может привести к созданию сверхнормативных запасов. Второй подход может привести к неоправданному растяжению сроков строительства. Возможно совместное использование указанных двух подходов.

3. Более совершенным, но одновременно и более трудоемким, является подход, заключающийся в дополнительном решении стохастической задачи на минимум ожидаемых затрат, которые складываются из расходов за хранение материалов, из штрафов за простои бригад машин и механизмов и дополнительной платы за кредиты в результате растяжения сроков строительства. Решать эту задачу можно с помощью совместного использования статистических методов и эвристических процедур. Однако из-за сложности получения необходимой для задачи информации и большой трудоемкости ее решения использование третьего подхода, как правило, нецелесообразно.

При решении вопроса о применении того или иного метода формирования календарного плана необходимо учитывать важность и сложность объекта, обеспеченность строительной организации трудовыми, техническими и материальными ресурсами и многие другие факторы. На этом этапе целесообразно использовать диалоговые методы, причем в процессе диалога следует допустить возможность перераспределения руководством строительной организации ресурсов для выполнения строительных работ на объектах.

Одновременно с составлением ориентировочного календарного плана возникает проблема определения сроков поставки материалов. Простейшее решение - поставка материалов в ранние сроки начала работ может привести к созданию сверхнормативных запасов, а также не пригодно для расчета сроков поставки скоропортящихся материалов, таких как раствор и асфальт. Поэтому сроки поставок материалов (особенно скоропортящихся) должны определяться лишь приближенно и уточняться в процессе строительства объекта на основе корректировок плана. Заметим, что и для корректировок плана, и при оперативном управлении ходом строительных работ, изложенные выше алгоритмы могут применяться практически без изменений. Отметим также, что при составлении прогноза на шаге IУ второго алгоритма необходимо учитывать, что вследствие задания сроков некоторых поставок материалов, а также составления ориентировочных календарных планов для ряда работ необходимо учитывать, что они не могут начаться раньше определенного момента времени. Алгоритм составления прогноза при этом практически не меняется.

Как первая, так и вторая задачи комплекса решались без привязки к конкретному календарю и без учета ресурсных ограничений строительной организации. Для учета взаимной зависимости объектов и осуществления привязки календарных планов к конкретному календарю применяется третья задача комплекса.

Эта задача комплекса является основной и состоит в распределении капитальных вложений и формировании годовой программы строительно-монтажных работ строительной организации (СУ, треста, Главка, министерства). В зависимости от специфики строительной организации меняются математические модели задачи. Приведем некоторые из них.

I. Задача выбора оптимальной очередности выполнения объектов (ЗВО). Эта задача возникает при решении проблем календарного планирования и прогнозирования для небольших строительных организаций (строительная бригада, СУ, СМУ). Она подробно рассмотрена в третьем параграфе первой главы (задача 6).

П. Двухэтапная задача календарного планирования. Эта задача возникает на более высоких уровнях управления, чем ЗВО и является обобщением первых двух задач комплекса. Она так же, как и вторая задача комплекса, состоит в минимизации максимального потребления ресурсов в каждый момент времени, но в этой задаче роль работ выполняют строительные объекты. В задаче для каждого из объектов заданы: распределение трудовых ресурсов по работам и дискретная функция распределения продолжительности строительства(ДФРПС). Эти параметры получаются в результате решения первых двух задач комплекса. Предполагается, что в результате решения второй задачи комплекса удается добиться равномерного потребления ресурсов и определить нижнюю и верхнюю границы интенсивности потребления ресурсов на объекте. Для определения этих границ могут применяться методы из / 18 /. Также предполагается, что при изменении интенсивности потребления ресурсов от нижней до верхней границы в ДФРПС сохраняются частоты попадания в интервалы с одинаковыми номерами, а длина интервалов обратно пропорциональна интенсивности потребления ресурсов.

В задаче задается надежность выполнения годовой программы строительно-монтажных работ строительной организации и ставится цель минимизации максимального потребления ресурсов в каждый момент времени, либо задается интенсивность потребления ресурсов в каждый момент времени и максимизируется надежность выполнения строительной программы. Для решения этой задачи может применяться тот же алгоритм, что и для решения второй задачи комплекса.

Рассмотренный в этом параграфе комплекс задач внедрен в "АСУ-Спецзадач" Минводхоза СССР и "АСУ-Инжстрой" Главмосинжстроя при Мосгорисполкоме. Опыт внедрения показал, что результаты решения рассмотренных задач могут использоваться на различных уровнях управления, вызывают положительное отношение со стороны руководства строительных организаций и дают значительный экономический эффект (только в "АСУ-Инжстрой" реальный экономический эффект от внедрения комплекса задач превысил 80 тыс.руб.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Проведенный анализ работ, посвященных проблемам моделирования и анализа задач распределения капитальных вложений и формирования программ СМР крупных строительных организаций, позволяет сделать вывод о целесообразности разработки моделей и методов дискретной оптимизации для этих задач.

2. Применение дискретных оптимизационных моделей дало возможность выработать единый подход, позволяющий сформулировать основные виды типовых задач хозяйственной практики в области капитальных вложений в унифицированной, стандартной форме. С помощью компоновки разработанных в диссертации базовых моделей для типовых ЗРКВ можно строить сложные модели, адекватные различным хозяйственным ситуациям.

3. Показано, что задачи с фиксированными доплатами, а также задачи с иерархической и модульной структурой ограничений адекватны большому и важному классу задач распределения капитальных вложений. Эти модели позволяют учитывать: специфику и экономическое содержание затрат различного вида в капитальном строительстве; взаимозависимость строящихся объектов; иерархию строительных организаций и ряд других важных факторов.

4. В работе исследованы вопросы вычислительной сложности рассматриваемых задач. Показано, что все они относятся к классу $NП$-трудных задач. Поскольку для таких задач не существует эффективных точных алгоритмов, особую актуальность приобретает разработка для них эффективных приближенных алгоритмов с оценками. Рассматриваются алгоритмы получения априорных гарантированных

оценок целевой функции, а также ε -приближенные алгоритмы, вырабатывающие "почти оптимальные" решения ЗРКВ. Исследована область применения таких алгоритмов и их особенности.

5. Разработаны методы увязки задач распределения капитальных вложений с задачами развертывания строительства во времени с учетом сложной структуры взаимосвязей строительно-монтажных работ, иерархии строительных организаций и вероятностного характера строительных процессов.

6. Опыт внедрения предлагаемых моделей и методов показал их широкую применимость, что связано с тем, что предлагаемые модели работают с первичной экономической информацией, а разработанные методы позволяют быстро получать "почти оптимальные" решения рассматриваемых задач, благодаря чему руководители, принимающие решения, получают некоторый спектр вариантов, близких к оптимальному и имеют возможность выбора лучшего из них с учетом неформализуемых, качественных соображений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Изд.2-е. М.: Госполитиздат, т.3.

2. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Изд.2-е. М.: Госполитиздат, т.49.

3. Ленин В.И. Полн.собр.соч. Изд.5-е. М.: Госполитиздат, т.43.

4. Материалы ХХУ съезда КПСС. - М.: Политиздат, I976. - 256 с.

5. Материалы ХХУI съезда КПСС. - М.: Политиздат, I98I.- 223 с.

6. Абалкин Л.И. Конечные народнохозяйственные результаты. - Вопросы экономики, I976, № II, с.3-I3.

7. Аганбегян А.Г. Управление социалистическими предприятиями. Вопросы теории и практики. - М.: Экономика, I979. - 448 с.

8. Акофф Р. Планирование в больших экономических системах. - М.: Советское радио, I972. - 224 с.

9. Аракелян А.А., Воротилов В.А., Кантор Л.М., Павлов П.М. Воспроизводство основных фондов в СССР. - М.: Мысль, I970. - 485 с.

I0. Ахо А., Хонкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. - М.: Мир, I979. - 536 с.

II. Бабат Л.Г. Линейные функции на n -мерном единичном кубе. - ДАН СССР, I975, т.222, № 4, с.76I-762.

I2. Бабат Л.Г. Приближенное вычисление линейной функции на вершинах единичного n -мерного куба. - В кн.: Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, I976, с.I56-I69.

I3. Бабат Л.Г. Задача с фиксированными доплатами. - Техническая кибернетика, I978, № 3, с.25-3I.

I4. Берзин А.К., Генс Г.В. Календарное планирование ремонтно-восстановительных работ. - В сб.: Автоматизированные системы управления водохозяйственным строительством. М.: ВНИИГиМ, 1980, с.I49-I53.

I5. Берштейн А.А. О решении целочисленной задачи линейного программирования. - В кн.: Исследования по кибернетике. М.: Советское радио, I970, с.I30-I32.

I6. Берштейн А.А., Тамбовцев В.Л. К проблеме моделирования процесса достижения целей. - В сб.: Цели и ресурсы в долгосрочном планировании. - М.: ЦЭМИ АН СССР, I979, с.I40-I47.

I7. Бурков В.Н. и др. Сетевые модели и задачи управления. - М.: Советское радио, I967. - I44 с.

I8. Волгин В.А., Генс Г.В., Гик Е.Я. Построение потокового алгоритма для решения одной задачи управления строительством.- В сб.: Проблемы создания производственно-технологических АСУ в дискретном производстве. Минск: I980, с.I46-I52.

I9. Воропаев В.И. Модели и методы календарного планирования в автоматизированных системах управления строительством. - М.: Стройиздат, I975. - 232 с.

20. Генс Г.В. Задачи распределения капитальных вложений с иерархической структурой ограничений. - В сб. тезисов докладов I Всесоюзного совещания по анализу нечисловой информации. Москва - Алма-Ата, I98I, с.I78-I79.

2I. Генс Г.В. Задачи с фиксированными доплатами и эффективные приближенные алгоритмы их решения. - Техническая кибернетика, I98I, № 6, с.I8-28.

22. Генс Г.В., Гик Е.Я. Задачи оптимального распределения ресурсов в непромышленной сфере. - В сб.: Использование методов автоматизации в текущем планировании и оперативном управлении производством. Тезисы докладов. М.: I979, с.I78-I79.

23. Генс Г.В., Левнер Е.В. Приближенные алгоритмы для некоторых универсальных задач теории расписаний. - Техническая кибернетика, I978, № 6, с.38-43.

24. Генс Г.В., Левнер Е.В. Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач (обзор). - Техническая кибернетика, 1979, № 6, с.9-20.

25. Генс Г.В., Левнер Е.В. Алгоритмы эффективного распределения ресурсов в управляемых иерархических системах. - В сб. тезисов докладов УШ Всесоюзного совещания по проблемам управления. Таллин, 1980, с.347-349.

26. Генс Г.В., Левнер Е.В. Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1981. - 66 с.

27. Генс Г.В., Левнер Е.В., Фрумкин М.А. О вычислительной сложности экстремальных комбинаторных. - В сб. кратких тезисов докладов на советско-польском научном семинаре по математическим методам в планировании и управлении экономикой. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979, с.21.

28. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритм с оценками для задач дискретной оптимизации. - Проблемы кибернетики, вып.31, М.: Наука, 1976, с.35-42.

29. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. - М.: Наука, 1968. - 400 с.

30. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Советское радио, 1966. - 524 с.

31. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. - М.: Экономика, 1978. - 351 с.

32. Данилов-Данильян В.И. Целевые программы и оптимальное перспективное планирование. - Экономика и математические методы, 1977, т.XШ, вып.6, с.1150-1163.

33. Данилов-Данильян В.И., Тороян В.О. Модель целевой программы в системе оптимального перспективного планирования. - Экономика и математические методы, 1978, т.XIУ, вып.4, с.654-668.

34. Дасковский В.Б. Планирование экономической эффективности капитальных вложений. Некоторые проблемы экономической эффективности проектов. - М.: Наука, 1980. - 189 с.

35. Диниц Е.А. Задача булева программирования при ограничениях одного знака. - В сб. трудов У Всесоюзного симпозиума по системам программного обеспечения решения задач оптимального планирования. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1978, с.190-191.

36. Долгосрочные программы капитальных вложений (экономические проблемы и модели). / Под ред. Красовского В.П. - М.: Экономика, 1974. - 270 с.

37. Жеребин В.М. Информационное обеспечение АСУ. - М.: Наука, 1975. - 200 с.

38. Кагарлицкая В.И. Модель распределения капитальных вложений в долгосрочной программе. - Экономика и математические методы, 1978, т.XIУ, вып.5, с.887-893.

39. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем. - Кибернетический сборник, новая серия. М.: Мир, 1975, вып.12, с.16-32.

40. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование.- М.: Наука, 1969. - 368 с.

41. Кравченко Т.К. Процесс принятия плановых решений (информационные модели). - М.: Экономика, 1974. - 183 с.

42. Кук С.А. Сложность процедур вывода теорем. - Кибернетический сборник, новая серия. М.: Мир, 1975, вып.12, с.5-15.

43. Левин Л.А. Универсальные задачи перебора. - ЖППИ, 1973, т.9, с.115-116.

44. Левнер Е.В., Генс Г.В. Дискретные оптимизационные задачи и эффективные приближенные алгоритмы. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1978. - 55 с.

45. Левнер Е.В., Генс Г.В. Анализ вычислительной сложности приближенных алгоритмов для некоторых дискретных оптимизационных задач. - В сб.: Математические методы решения экономических задач, вып.9. М.: Наука, 1980, с.97-106.

46. Лившиц Э.М. Исследование некоторых алгоритмов оптимизации сетевых моделей. - Экономика и математические методы, 1968, т.IУ, вып.5, с.768-775.

47. Лившиц Э.М., Рублинецкий В.М. О сравнительной сложности некоторых задач дискретной оптимизации. - В сб.: Вычислительная математикаи и вычислительная техника. Харьков: 1972, вып.3, с.78-85.

48. Массе П. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений. - М.: Статистика, 1971. - 502 с.

49. Меркин Р.М. Экономические проблемы сокращения продолжительности строительства. - М.: Экономика, 1978. - 174 с.

50. Методические указания к разработке государственных планов экономического и социального развития СССР. - М.: Экономика, 1980. - 776 с.

51. Методы и практика определения эффективности капитальных вложений и новой техники. - М.: Наука, 1974, вып.23, 24; 1975, вып.25; 1976, вып.26.

52. Митрофанов А.И., Меркин Р.М. Методы расчета капитальных вложений при перспективном планировании. (Вопросы нормативного обоснования отраслевых планов капитальных вложений). - М.: Экономика, 1966. - 199 с.

53. Моделирование формирования территориально-производственных комплексов. / Под ред.Бандмана М.К. - Новосибирск: Наука, 1976. - 338 с.

54. Нигматулин Р.Г. Сложность приближенного решения комбинаторных задач. - ДАН СССР, 1975, т.224, № 2, с.289-292.

55. Овсиенко Ю.В., Сухотин Ю.В. К вопросу о месте теории оптимального функционирования экономики в системе экономических наук социализма. - Экономика и математические методы, 1979, т.ХУ, вып.4, с.783-795.

56. Петраков Н.Я. Некоторые проблемы народнохозяйственного критерия оптимальности и практические задачи совершенствования системы плановых показателей. - Экономика и математические методы, т.ХУ, 1979, вып.6, с.1056-1066.

57. Планирование и анализ народнохозяйственной структуры капитальных вложений. / Под ред. Красовского В.П. - М.: Экономика, 1970. - 262 с.

58. Подшиваленко П.Д. Задача сокращения сроков строительства. - Вопросы экономики, 1979, № 3, с.3-12.

59. Пыка Т. Программирование оптимального распределения капиталовложений. - М.: Прогресс, 1974. - 151 с.

60. Руководство по разработке и применению типовых организационно-технологических моделей и нормативов для водохозяйственного строительства. ВРН-У-I-77г. - М.: ВНИИГиМ, 1978.- 78 с.

61. Севастьянов С.В. Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний. - Управляемые системы, Новосибирск: 1975, № 4, с.40-51.

62. Седелев Б.В. Оценка распределенных лагов в экономических процессах. - М.: Экономика, 1977. - 191 с.

63. Сердюков А.И. К задаче о покрытии. - В сб.: Управляемые системы (управляемые процессы). Новосибирск, 1975, вып.14, с.52-58.

64. Система моделей оптимального планирования. / Под ред. Федоренко Н.П. - М.: Наука, 1975. - 376 с.

65. Смехов Б.М. Планирование капитальных вложений. - М.: Госполитиздат, 1961. - 331 с.

66. Смехов Б.М. Планирование капитальных работ. - М.: Госполитиздат, 1955. - 144 с.

67. Смышляева Л.М. Экономический рост и пропорции капитальных вложений. - М.: Экономика, 1976. - 191 с.

68. Среднесрочные программы капитальных вложений (методология, моделирование). / Под ред. В.П.Красовского. - М.: Экономика, 1972. - 223 с.

69. Фактор времени в плановой экономике. Инвестиционный аспект. / Под ред.Красовского В.П. - М.: Экономика, 1978. - 246 с.

70. Факторы и источники роста эффективности общественного производства. / Хачатуров Т.С., Медведев В.А., Белоусов Р.А. и др.- М.: Мысль, 1979. - 341 с.

71. Факторы и тенденции развития структуры народного хозяйства СССР. / Отв.ред. Г.М.Сорокин. - М.: Наука, 1977. - 392 с.

72. Федоренко Н.П. Автоматизированные системы управления предприятиями. - М.: Наука, 1972. - 214 с.

73. Федоренко Н.П. Оптимизация экономики. Некоторые вопросы использования экономико-математических методов в народном хозяйстве. - М.: Наука, 1977. - 287 с.

74. Федоренко Н.П. Некоторые вопросы теории и практики планирования и управления. - М.: Наука, 1979. - 438 с.

75. Федоренко Н.П. Проблемы народнохозяйственного критерия оптимальности: уровень разработки и направление дальнейших исследований. - Экономика и математические методы, 1979, т.XУ, вып.6, с. 1045-1055.

76. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. - М.: Наука, 1976. - 264 с.

77. Финкельштейн Ю.Ю. ε -подход к многомерной задаче о ранце. - ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 4, с.1040-1042.

78. Форд Л.Р., Фолкерсон Д.Р. Потоки в сетях. - М.: Мир, 1966.- 276 с.

79. Фридман А.А. О некоторых современных направлениях в дискретной оптимизации. - Экономика и математические методы, 1977, т.XIII, вып.5, с.1115-1131.

80. Фрумкин М.А. Сложность дискретных задач. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1981. - 57 с.

81. Хачатуров Т.С. Эффективность капитальных вложений. - М.: Экономика, 1979. - 335 с.

82. Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. - ДАН СССР, 1979, т.244, № 5, с.1093-1096.

83. Чудновский Д., Шапиро И., Баранова С. Методологические проблемы планирования межотраслевого строительного комплекса. - Плановое хозяйство, 1976, № 2, с.83-93.

84. Эффективность общественного производства (критерии, методы расчета, показатели). / Под ред. Плышевского Б.П. - М.: Экономика, 1976. - 215 с.

85. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Оценка информационной сложности задач математического программирования. - Экономика и математические методы, 1976, т.XII, вып.1, с.128-142.

86.Cornuejols G.,Fisher M.L.,Nemhauser G.L. Location of bank accounts to optimaze floats.-Manag.Sci.,1977,23,N8,789-810.

87.Fisher M.L. Worst-case analysis of heuristics.-In: Interfaces between Computer Science and Operation Research (eds.J.K.Lenstra,A.H.G.Rinnooy Kan,P.van Emde Boas),Amsterdam,Mathematical Centre,1978.

88.Garey M.R.,Graham R.L.,Johnson D.S. Performance guarantees for scheduling algorithms.-Operations Research,1978,N1,3-21.

89.Garey M.R.,Johnson D.S. Approximation algorithms for combinatorial problems:an annotated bibliography.-In: Algorithms and Complexity. Academic Press,N.Y.,1976,1-19.

90.Graham R.L. Bounds on multiprocessing timing anomalies.-SIAM J.of Appl.Math.,1969,17,416-429.

91.Gens G.V.,Levner E.V. Fast approximation Algorithm for job sequencing with deadliens.- Discrete Appl.Math.,1981,N3,313-318.

92.Horowits E.,Sahni S. Exact and approximate algorithms for scheduling non-identical processors.- J.ACM,1976,23,317-327.

93.Ibarra O.H.,Kim C.E. Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems.- J.ACM,1975,22,463-468.

94.Ibarra O.H.,Kim C.E. Approximation algorithms for certain scheduling problems.- Math.of O.R.,1978,N3,197-204.

95.Johnson D.S.,Niemi N.A. On knapsack and partitions in trees.-to appear in Mathemat.of Oper.Res.

96.Kannan R.,Korte B. Approximative combinatorial algorithms.-Report No,78107, Institut für Ökonometrie und Operations Research,University of Bonn,1978.

97.Karp R.M. The fast approximate solution of hard combinatorial problems.- Proc. 6th Southeastern Conf.on Combinatorics,Graph

Theory, and Computing, Utilitas Mathematica Publishing, Winnipeg, 1975, 15-31.

98. Korte B., Schrader R., On the existence of fast approximation schemes. Report No.80163, Institute für Ökonometrie und Operations Research, University of Bonn, 1980.

99. Lawler E. Fast approximation algorithms for knapsack problems. Mathematics of Oper.Res., 1979, 4, N4, 339-357.

100. Sahni S. Algorithms for scheduling independent tasks.-J.ACM, 1976, 23, N1, 114-127.

101. Sahni S. General techniques for Combinatorial Approximation.-Operations Research, 1977, N6, 920-936.

102. Sahni S., Gonzales T. P-complete approximation problems.-J.ACM, 1976, 23, N3, 555-565.

103. Ullman J.D. Complexity of Sequencing Problems.-chapter 4 in Computer and Job Shop Scheduling Theory, E.C.Coffman, Jr (ed.) John Wiley and Sons, New York, 1976, 139-164.